हिंदी

Adda247 PUBLICATIONS

MATHS TONIC

गुरुमंत्र

Arithmetic & Advance Maths

CONCEPTS || FORMULAE || THEOREMS || RESULTS

ABHINANDAN JAIN

USEFUL FOR

SSC
CGL, CPO, CHSL, MTS, GD, Delhi Police Constable

RRB
NTPC, RPF, Group-D & All Railway Exam

UP
UPSI, UP Constable, Lekhpal, UPSSSC PET

तथा अन्य सभी प्रतियोगी परीक्षाओं के लिए सामान रूप से उपयोगी !

विषय सूची

अध्याय-1. : ज्यामिति (Geometry)

1. परिचय (Introductory) ... 13

2. रेखा (Line) ... 13

3. कोण (Angle) ... 17

4. त्रिभुज (Triangle) ... 24
   - I. अवधारणा (Concepts) ... 24
   - II. त्रिभुज के प्रकार (Kind of Triangle) ... 25
   - III. संगामी रेखाएँ (Concurrent Lines) ... 27
   - IV. त्रिभुज की सर्वांगसमता एवं समरूपता (Congruence and Similarity of Triangles) ... 30
   - V. त्रिभुज से सम्बन्धित प्रमुख प्रमेय (Important Theorem Related to Triangle) ... 35

5. चतुर्भुज (Quadrilateral) ... 38
   - I. अवधारणा (Concepts) ... 38
   - II. चतुर्भुज के प्रकार (Kind of Quadrilateral) ... 38

6. वृत्त (Circle) ... 42
   - I. अवधारणा (Concepts) ... 42
   - II. वृत्त की स्पर्श रेखाएँ (Tangent Lines of the Circle) ... 46

7. पतंग (Kite) ... 47

8. क्षेत्रफल प्रमेय (Area Theorem) ... 48
   - I. अवधारणा (Concepts) ... 48
   - II. कुछ प्रमुख पद (Some Important Terms) ... 50
   - III. बहुभुज क्षेत्र (Polygon Region) ... 51
   - IV. अभिगृहीत (Axiom) ... 51

Adda247

V. एक ही आधार और एक ही समान्तर रेखाओं के बीच स्थित समान्तर चतुर्भुज एवं त्रिभुज (Parallelograms and triangles on the same base and between the same parallels) ... 52
VI. समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल (Area of Parallelogram) ... 54
VII. त्रिभुज का क्षेत्रफल (Area of Triangle) ... 57
9. कुछ प्रमुख परिणाम (Some Important Results) ... 60

अध्याय-2. : क्षेत्रमिति-2 आयामी (Mensuration-2 Dimension)

1. परिचय (Introductory) ... 93
I. क्षेत्रफल (Area) ... 93
II. परिमाप या परिमिति (Perimeter) ... 93
2. त्रिभुज (Triangle) ... 93
I. अवधारणा (Concepts) ... 93
II. त्रिभुज के प्रकार (Kind of Triangle) ... 94
3. चतुर्भुज (Quadritateral) ... 97
I. अवधारणा (Concepts) ... 97
II. चतुर्भुज के प्रकार (Kind of Parallelogram) ... 98
4. वर्ग (Square) ... 100
I. अवधारणा (Concepts) ... 100
5. आयत (Rectangle) ... 101
I. अवधारणा (Concepts) ... 101
6. वृत्त (Circle) ... 102
I. अवधारणा (Concepts) ... 102
7. बहुभुज (Polygon) ... 103
I. अवधारणा (Concepts) ... 103
8. कुछ प्रमुख परिणाम (Some Important Results) ... 109

Adda247

अध्याय-3. : क्षेत्रमिति-3 आयामी (Mensuration-3 Dimension)

1. परिचय (Introductory) ... 118
   I. आयतन (Volume) ... 118
   II. सतह (Surface) ... 118
2. घन (Cube) ... 118
   I. अवधारणा (Concepts) ... 118
3. घनाभ (Cuboid) ... 119
   I. अवधारणा (Concepts) ... 119
4. बेलन (Cylinder) ... 121
   I. अवधारणा (Concepts) ... 121
5. शंकु (Cone) ... 122
   I. अवधारणा (Concepts) ... 122
6. गोला (Sphere) ... 123
   I. अवधारणा (Concepts) ... 123
7. पिरामिड (Pyramid) ... 125
   I. अवधारणा (Concepts) ... 125
8. कुछ प्रमुख परिणाम (Some Important Results) ... 126

अध्याय-4. : नियामक/निर्देशांक ज्यामिति (Co-ordinate Geometry)

1. परिचय (Introductory) ... 131
2. रेखीय समीकरण का ग्राफीय हल (Graphical Solution of Linear Equation) ... 133
   I. सरल रेखा का समीकरण (Equation of Staright Line) ... 133
   II. अक्षों का समीकरण (Equation of Axes) ... 137
   III. सरल रेखाओं से बने त्रिभुज का क्षेत्रफल (Area of Triangle Formed from Straight Lines) ... 137

3. सरल रेखा की ढाल (Slope of Straight Line) ... 139
4. रेखायुग्म (Line Pair) ... 139
5. कुछ प्रमुख परिणाम (Some Important Results) ... 140

अध्याय-5. : बीजगणित (Algebra)

1. परिचय (Introductory) ... 148
2. कुछ प्रमुख बीजगणितीय सूत्र (Some Important Algebraic Formulae) ... 148
3. घातांक से सम्बन्धित कुछ प्रमुख नियम (Some Important Rules Related to Indices) ... 149
4. करणी से सम्बन्धित कुछ प्रमुख नियम (Some Important Rules Related to Surds) ... 150
5. ल0स0 तथा म0स0 (LCM & HCF) ... 153
   I. अपवर्त्य (Multiple) ... 153
   II. समापवर्त्य (Common Multiple) ... 153
   III. लघुत्तम समापवर्त्य (Least Common Multiple) ... 154
   IV. अपवर्तक या गुणनखण्ड (Factor) ... 154
   V. समापवर्तक (Common Factor) ... 154
   VI. महत्तम समापवर्तक (Highest Common Factor) ... 154
   VII. महत्तम समापवर्तक तथा लघुत्तम समापवर्त्य में सम्बन्ध (Relation between LCM and HCF) ... 155
6. युगपत समीकरण (Simultaneous Equation) ... 155
   I. युगपत समीकरण (Simultaneous Equation) ... 155
   II. युगपत समीकरणों के हल (Solutions of Simultaneous Equations) ... 155
   III. युगपत समीकरणों के हल करने की विधियाँ (Methods of Solving of the Simultaneous Equations) ... 155

7. द्विघात समीकरण (Quadratic Equation) ... 158
I. द्विघात बहुपद (Quadratic Polynomial) ... 158
II. द्विघात बहुपद के शून्यक (Zeroes of a Quadratic Polynomial) ... 158
III. द्विघात समीकरण (Quadratic Equation) ... 158
IV. द्विघात समीकरण के मूल (Roots of a Quadratic Equation) ... 159
8. गुणनखण्ड (Factorization) ... 162
I. बहुपदों का गुणनखण्ड (Factors of Polynomial) ... 165
II. गुणनखण्ड प्रमेय (Factor Theorem) ... 166
III. गुणनखण्ड प्रमेय का उपयोग कर गुणनखण्ड ज्ञात करना (Finding the Factor Using Factorization Theorem) ... 166
9. शेषफल प्रमेय (Remainder Theorem) ... 168
I. शेषफल प्रमेय (Remainder Theorem) ... 168
10. कुछ प्रमुख परिणाम (Some Important Results) ... 170

अध्याय-6. : त्रिकोणमिति (Trigonometry)

1. परिचय (Introductory) ... 175
2. त्रिकोणमितीय अनुपात (Trigonometric Ratio) ... 175
3. डिग्री और रेडियन माप (Degree and Radian Measures) ... 182
4. मानक सर्वसमिकाएँ (Standard Identities) ... 186
5. पूरक कोण (Complementary Angles) ... 191
6. ऊँचाई एवं दूरी (Height and Distance) ... 194
7. कुछ प्रमुख परिणाम (Some Important Results) ... 197

अध्याय-7. : अंकगणित (Arithmetic)

1. संख्या पद्धति (Number System) ... 216
I. अवधारणा (Concepts) ... 216

II. अंक (Digit) ... 218

III. दाशमिक पद्धति की विशेषताएँ (Characteristics of Decimal System) ... 219

IV. अंकों के मान (Value of Digits) ... 219

V. संख्याओं का वर्गीकरण (Classification of Numbers) ... 220

VI. विभाज्यता के नियम (Rules of Divisibility) ... 222

VII. द्विआधारी पद्धति (Binary Number System) ... 229

VIII. ऑक्टल संख्या पद्धति (Octal Number System) ... 232

IX. हेक्साडेसीमल संख्या पद्धति (Hexadecimal System) ... 234

X. रामानुजन संख्या (Ramanujan Number) ... 235

XI. विंकुलम संख्या (Vinculum Number) ... 236

XII. कुछ प्रमुख परिणाम (Some Important Results) ... 236

2. लघुत्तम समापवर्त्य (Lowest Common Multiples) ... 246

I. अवधारणा (Concepts) ... 246

II. लघुत्तम समापवर्त्य निकालने की विधियाँ (Methods of Finding the LCM) ... 247

III. साधारण भिन्नों का लघुत्तम समापवर्त्य ज्ञात करना (Finding the LCM of Simple Fractions) ... 248

IV. दशमलव भिन्नों का लघुत्तम समापवर्त्य ज्ञात करना (Finding the LCM of Decimal Fractions) ... 248

V. कुछ प्रमुख परिणाम (Some Important Results) ... 248

3. महत्तम समापवर्तक (Highest Common Factor) ... 250

I. अवधारणा (Concepts) ... 250

II. महत्तम समापवर्तक निकालने की विधियाँ (Methods of Finding the HCF) ... 250

III. साधारण भिन्नों का महत्तम समापवर्तक ज्ञात करना (Finding the HCF of Simple Fractions) ... 252

IV. दशमलव भिन्नों का महत्तम समापवर्तक ज्ञात करना (Finding the HCF of Decimal Fractions) ... 252

V. कुछ प्रमुख परिणाम (Some Important Results) ... 252

4. साधारण भिन्न (Simple Fraction) ... 253

I. अवधारणा (Concepts) ... 253

II. भिन्न के गुण (Peoperties of Fraction) ... 253

III. भिन्न के रूप (Forms of Fraction) ... 254

IV. भिन्न पर संक्रियाएँ (Operations of Fraction) ... 255

V. कुछ प्रमुख परिणाम (Some Important Results) ... 264

5. दशमलव भिन्न (Decimal Fraction) ... 266

I. अवधारणा (Concepts) ... 266

II. दशमलव भिन्न पर संक्रियाएँ (Operations of Decimal Fraction) ... 267

6. वर्ग एवं वर्गमूल (Square and Square Root) ... 273

I. अवधारणा (Concepts) ... 273

II. वर्गमूल ज्ञात करने की विधियाँ (Methods of Finding Square Root) ... 275

III. दशमलव भिन्नों के वर्गमूल ज्ञात करना (Finding the Square Root of Decimal Fractions) ... 276

IV. साधारण भिन्नों के वर्गमूल ज्ञात करना (Finding the Square Root of Simple Fractions) ... 277

V. कुछ प्रमुख परिणाम (Some Important Results) ... 279

7. घन तथा घनमूल (Cube and Cube Root) ... 281

I. अवधारणा (Concepts) ... 281

II. घनमूल ज्ञात करने की विधि (Method of Finding Cube Root) ... 282

III. कुछ प्रमुख परिणाम (Some Important Results) ... 283

8. घातांक (Exponents/Indices) ... 283
I. अवधारणा (Concepts) ... 283
II. घातांक के नियम (Laws of Exponents) ... 284
9. करणी (Surds or Radicals) ... 286
I. अवधारणा (Concepts) ... 286
II. करणी के प्रकार (Kinds of Radicals or Surds) ... 286
III. करणी के नियम (Laws of Surds) ... 287
IV. दो करणियों की तुलना (Comparison of Two Surds) ... 289
V. समान करणियों का योग, घटाव, गुणा एवं भाग (Addition, Subtraction, Multiplication and Division of Like Surds) ... 290
VI. n घातांक की करणी को m घातांक वाली करणी में बदलना ... 290
VII. कुछ प्रमुख परिणाम (Some Important Results) ... 290
10. सरलीकरण (Simplification) ... 291
I. अवधारणा (Concepts) ... 291
II. कुछ प्रमुख परिणाम (Some Important Results) ... 291
11. औसत (Average) ... 292
I. अवधारणा (Concepts) ... 292
II. कुछ प्रमुख परिणाम (Some Important Results) ... 293
12. अनुपात (Ratio) ... 295
I. अवधारणा (Concepts) ... 295
II. अनुपात के प्रकार (Kinds of Ratio) ... 295
III. कुछ प्रमुख परिणाम (Some Important Results) ... 296
13. समानुपात (Proportion) ... 298
I. अवधारणा (Concepts) ... 298
II. समानुपात के प्रकार (Kind of Proportion) ... 299

III. कुछ प्रमुख परिणाम (Some Important Results) ... 301
14. समानुपाती विभाजन (Proportional Division) ... 301
I. अवधारणा (Concepts) ... 301
15. साझेदारी (Partnership) ... 302
I. अवधारणा (Concepts) ... 302
II. लाभ-हानि का बँटवारा (Distribution of Profit and Loss) ... 302
III. कुछ प्रमुख परिणाम (Some Important Results) ... 304
16. मिश्रण (Mixture) ... 305
I. अवधारणा (Concepts) ... 305
II. मिश्रण के नियम (Rules of Mixture) ... 306
III. कुछ प्रमुख परिणाम (Some Important Results) ... 306
17. समय और कार्य (Time and Work) ... 307
I. अवधारणा (Concepts) ... 307
II. हल करने की विधियाँ (Methods of Solving) ... 308
III. कुछ प्रमुख परिणाम (Some Important Results) ... 311
18. नल और टंकी (Pipe and Cistern) ... 312
I. अवधारणा (Concepts) ... 312
II. कुछ प्रमुख परिणाम (Some Important Results) ... 312
19. समय और दूरी (Time and Distance) ... 313
I. अवधारणा (Concepts) ... 313
II. कुछ प्रमुख परिणाम (Some Important Results) ... 314
20. रेलगाड़ी (Train) ... 315
I. अवधारणा (Concepts) ... 315
II. कुछ प्रमुख परिणाम (Some Important Results) ... 316
21. नाव और धारा (Boat and Stream) ... 317
I. अवधारणा (Concepts) ... 317
II. कुछ प्रमुख परिणाम (Some Important Results) ... 317

Adda247

22. दौड़ (Race) ... 318
I. अवधारणा (Concepts) ... 318
23. प्रतिशतता (Percentage) ... 319
I. अवधारणा (Concepts) ... 319
II. कुछ प्रमुख परिणाम (Some Important Results) ... 319
24. लाभ और हानि (Profit and Loss) ... 322
I. अवधारणा (Concepts) ... 322
II. कुछ प्रमुख परिणाम (Some Important Results) ... 323
25. बट्टा (Discount) ... 326
I. अवधारणा (Concepts) ... 326
II. बट्टा के प्रकार (Kind of Discount) ... 326
III. कुछ प्रमुख परिणाम (Some Important Results) ... 328
26. साधारण ब्याज (Simple Interest) ... 328
I. अवधारणा (Concepts) ... 328
II. साधारण ब्याज निकालने के सूत्र (Formulae of Finding the Simple Interest) ... 329
III. कुछ प्रमुख परिणाम (Some Important Results) ... 329
27. चक्रवृद्धि ब्याज (Compound Interest) ... 331
I. अवधारणा (Concepts) ... 331
II. चक्रवृद्धि ब्याज निकालने के सूत्र (Formulae of Finding the Compound Interest) ... 331
III. कुछ प्रमुख परिणाम (Some Important Results) ... 333
28. लघुगणक (Logarithm) ... 333
I. अवधारणा (Concepts) ... 333
II. लघुगणक के नियम (Rules of Logarithm) ... 333
III. सारणी से किसी संख्या के लघुगणक का मान ज्ञात करना ... 334

IV. किसी संख्या के लघुगणक का मान ज्ञात होने पर वह संख्या ज्ञात करना ... 335
29. सांख्यिकी (Statistics) ... 335
I. अवधारणा (Concepts) ... 335
II. आंकड़ा (Data) ... 335
III. आंकड़ों के प्रकार (Types of Data) ... 336
IV. सांख्यिकी के चरण (Steps of Statistics) ... 337
V. बारम्बारता (Frequency) ... 338
VI. बारम्बारता वितरण (Frequency Distribution) ... 338
VII. वर्ग या वर्ग अन्तराल (Class or Class interval) ... 340
VIII. अवर्गीकृत आंकड़ों का परिसर (Range of Classified Data) ... 341
IX. वर्ग चिह्न (Class mark or Mid-value) ... 341
X. वास्तविक निम्न सीमा एवं वास्तविक उच्च सीमा (True lower limits and True upper limits) ... 342
XI. आंकड़ों का निरूपण (Representation of Data) ... 343
XII. दण्ड चार्ट या दण्ड चित्र या दण्ड आरेख (Bar Graph) ... 344
XIII. पाई चार्ट या वृत्त आलेख (Pie-Chart) ... 345
XIV. आयतचित्र (Histogram) ... 345
XV. बारम्बारता बहुभुज (Frequency Polygons) ... 350
XVI. केन्द्रीय प्रवृत्ति (Central Tendency) ... 353
XVII. केन्द्रीय प्रवृत्ति की मापों के प्रकार (Types of Central Tendency) ... 354-360

01 अध्याय

ज्यामिति
Geometry

1. परिचय (Introductory)

- ‘ज्यामिति’ (Geometry) शब्द यूनानी भाषा के शब्दों ‘जियो’ (Geo) और ‘मेट्रीयिन’ (metrein) से मिलकर बना है। ‘Geo’ का अर्थ है ‘पृथ्वी’ या ‘भूमि’ और ‘Metrein’ का अर्थ है ‘मापना’। ज्यामिति का उद्‌गम भूमि मापने की आवश्यकता के कारण ही हुआ था।
- रेखाओं द्वारा बनी विभिन्न आकृतियों या बिन्दु पथों के गुणों तथा तत्वों के विवेचन को रेखागणित या ज्यामिति (Geometry) कहते हैं। रेखागणित का पिता यूक्लिड को कहा जाता है।

2. रेखा (Line)

- बिन्दु एक ऐसा स्थान है, जिसमें स्थिति तो होती है, किन्तु लम्बाई, चौड़ाई या मोटाई नहीं होती है।
- किसी चलायमान बिन्दु द्वारा बना ऐसा मार्ग, जिसमें केवल लम्बाई हो, किन्तु चौड़ाई या मोटाई न हो रेखा (Line) या वक्र (Curve) कहलाता है।
- ऐसी रेखा, जिसकी दिशा, एक बिन्दु से दूसरे बिन्दु तक सदैव एक ही रहती हो, ऋजु या सरल या सीधी रेखा (Straight Line) कहलाती है। यह दो बिन्दुओं के बीच की न्यूनतम दूरी होती है।

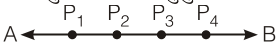
दिए गए चित्र में *AB* एक सीधी या सरल रेखा है।

- ऐसी रेखा, जो अपनी लम्बाई में एक बिन्दु से दूसरे बिन्दु तक दिशा बदल देती है, वक्र रेखा (Curve line) कहलाती है।

©Adda247 Publications

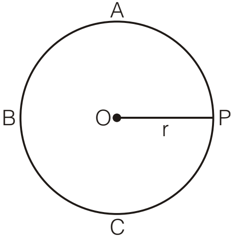
दिए गए चित्र में AB एक वक्र रेखा है।

- एक ही सरल रेखा पर स्थित बिन्दु समरेख बिन्दु (Collinear Points) कहलाते हैं। इन बिन्दुओं से बने चतुर्भुज का क्षेत्रफल शून्य होता है।

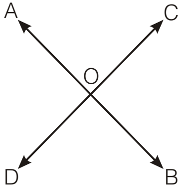


दिए गए चित्र में P_1, P_2, P_3, P_4 चार समरेख बिन्दु हैं।

- किन्हीं दी गयी शर्तों के अंतर्गत चलते हुए कोई बिन्दु जो मार्ग (Path) या वक्र (Curve) बनाता है, उसे उस बिन्दु का बिन्दुपथ (Locus) कहते हैं। यदि एक बिन्दु P इस प्रकार से चले की उसकी दूरी एक स्थिर बिन्दु से सदैव r रहे, तो P का बिन्दु पथ एक वृत्त A होगा, जिसका केन्द्र O तथा त्रिज्या r होगी।

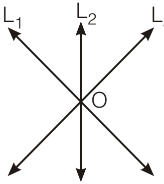


- दो या दो से अधिक रेखाओं के कटान बिन्दु को प्रतिच्छेद बिन्दु (Point of intersection) कहते हैं।



दिए गए चित्र में O रेखाओं AB तथा CD का प्रतिच्छेद बिन्दु है।

- एक ही बिन्दु से जाने वाली रेखाओं को संगामी रेखाएँ (Concurrent lines) कहते हैं।

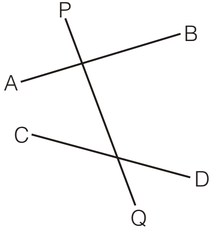


दिए गए चित्र में L_1, L_2, L_3 संगामी रेखाएँ हैं, जो कि एक ही बिन्दु O से गुजर रही हैं।

- ऐसी रेखाएँ, जो एक ही तल में स्थित हों और बढ़ाये जाने पर एक–दूसरे से न मिलें, समान्तर रेखाएँ (Parallel lines) कहलाती हैं। इनके बीच की दूरी सदैव बराबर रहती है।

दिए गए चित्र में AB और CD दो समान्तर रेखाएँ हैं।

- दो या दो से अधिक रेखाओं को काटने वाली रेखा तिर्यक् रेखा (Transversal line) कहलाती है।

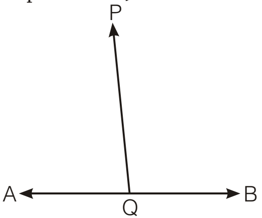


दिए गए चित्र में PQ एक तिर्यक् रेखा है, जो AB और CD रेखाओं को काटती है।

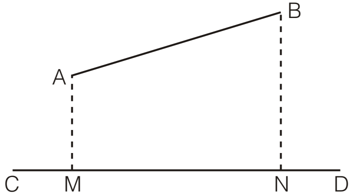
©Adda247 Publications

- किसी रेखा *AB* पर यदि दो अन्तः बिन्दु *P* तथा *Q* लिए जाए तो रेखा के भाग *PQ* को *AB* रेखा का रेखाखण्ड (Line segment) कहते हैं।

- यदि बिन्दु *P* से एक ऐसी रेखा *PQ* खींची जाए जो *AB* रेखा के साथ समकोण बनाये, जो *PQ* रेखा को बिन्दु *P* से *AB* रेखा पर डाला गया लम्ब (Perpendicular) कहते हैं तथा बिन्दु *Q* को इस लम्ब का लम्ब पाद (Foot of Perpendicular) कहते हैं।



- एक रेखा के सिरों से दूसरी रेखा पर डाले गये लम्बों के पादों की बीच की दूरी को उस रेखा का दूसरी रेखा पर प्रक्षेप (Projection) कहते हैं।



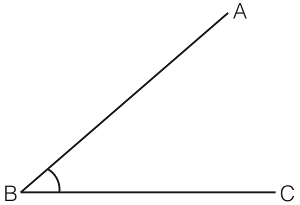
दिए गए चित्र में *AB* रेखा का *CD* रेखा का प्रक्षेप *MN* है।

- ऐसी रेखा, जिसको एक ही दिशा में असीमित दूरी तक बढ़ाया जा सकता है और दूसरी दिशा सीमित हो किरण (Ray) कहलाता है।

©Adda247 Publications

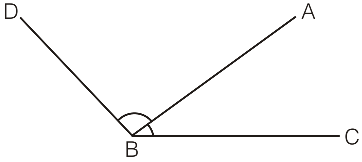
3. कोण (Angle)

- जब दो रेखाएँ एक बिन्दु पर मिलती हैं, तो वे कोण (Angle) बनाती हैं। रेखाएँ, कोण की भुजाएँ (Arms) तथा बिन्दु, कोण का शीर्ष (Vetrex) कहलाता है।



दिए गए चित्र में, *AB* और *BC* रेखाएँ *B* बिन्दु पर मिलती हैं तथा $\angle ABC$ बनाती हैं। *AB* और *BC* कोण की भुजाएँ हैं तथा *B* बिन्दु कोण का शीर्ष है।

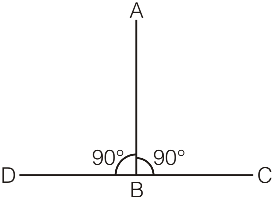
- जब तीन रेखाएँ एक बिन्दु पर मिलती हों, तो मध्यवर्ती रेखा अन्य दो भुजाओं के साथ जो दो कोण बनाती है, उन्हें संलग्न या आसन्न कोण (Adjacent Angle) कहते हैं।



दिए गए चित्र में $\angle ABC$ तथा $\angle ABD$ संलग्न कोण हैं।

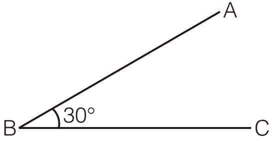
- जब एक रेखा किसी दूसरी रेखा पर खड़ी होकर बराबर संलग्न कोण बनाती है, तो इन कोणों में से प्रत्येक कोण समकोण कहलाता है।

©Adda247 Publications

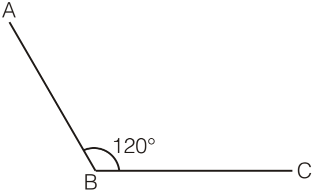


दिए गए चित्र में $\angle ABC$ तथा $\angle ABD$ समकोण हैं।

- यदि समकोण को बराबर-बराबर 90 भागों में बाँटा जाय तो प्रत्येक भाग एक अंश (Degree) कहलाता है। अत: समकोण 90 अंश या 90° का होता है। अंश का 60वाँ भाग 1 मिनट और 1 मिनट का 60वाँ भाग 1 सेकण्ड कहलाता है।
- समकोण (90°) से छोटे कोण को न्यूनकोण (Acute Angle) कहते हैं। दिए गए चित्र में $\angle ABC$ न्यूनकोण है। उदाहरणार्थ, 30°, 45°, ... आदि।

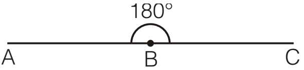


- 90° से बड़े किन्तु 180° से छोटे कोण को अधिक कोण (Obtuse Angle) कहते हैं।



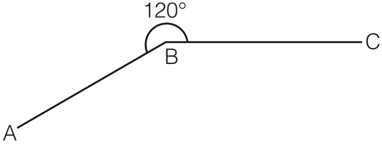
दिए गए चित्र में $\angle ABC$ अधिककोण है। उदाहरणार्थ 120°, 150°, ... आदि।

- 180° के कोण को ऋजु या सरल कोण (Straight Angle) कहते हैं। इनमें कोण की दोनों भुजाएँ एक सीधी रेखा में होती है।



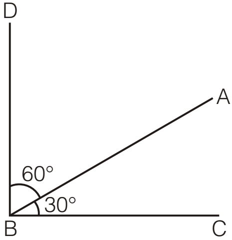
दिए गए चित्र में $\angle ABC$ एक ऋजुकोण है।

- 180° से बड़े किन्तु 360° से छोटे कोण को वृहत् कोण (Reflex Angle) कहते हैं।



दिए गए चित्र में $\angle ABC$ एक वृहत् कोण है। उदाहरणार्थ, 210°, 270°, ... आदि।

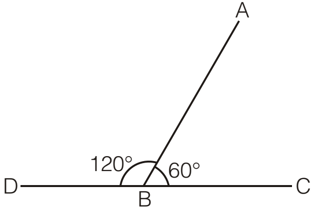
- जब दो कोणों का योग 90° होता है, तो प्रत्येक कोण एक-दूसरे का कोटिपूरक कोण (Complementary Angle) कहलाता है।



©Adda247 Publications

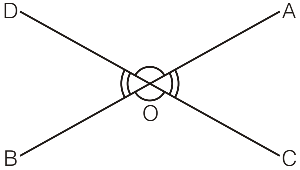
दिए गए चित्र में $\angle ABC, \angle ABD$ का तथा $\angle ABD, \angle ABC$ का कोटिपूरक कोण है, क्योंकि $\angle ABC + \angle ABD = 90°$. उदाहरणार्थ 30° तथा 60° एक–दूसरे के कोटिपूरक कोण हैं।

■ जब दो कोणों का योग 180° होता है, तो प्रत्येक कोण एक–दूसरे का सम्पूरक कोण (Supplementary Angle) कहलाता है।



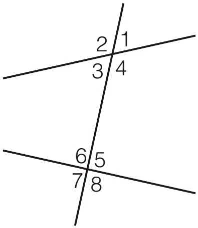
दिए गए चित्र में $\angle ABC, \angle ABD$ का तथा $\angle ABD, \angle ABC$ का सम्पूरक कोण है, क्योंकि $\angle ABC + \angle ABD = 180°$. उदाहरणार्थ 60° तथा 120° एक–दूसरे के सम्पूरक कोण हैं।

■ जब दो रेखाएँ एक–दूसरे को काटती हैं, तो उन रेखाओं द्वारा बने आमने–सामने के कोण, शीर्षाभिमुख कोण (Vertically Opposite Angles) कहलाते हैं।



दिए गए चित्र में $\angle AOC$ और $\angle BOD$ तथा $\angle AOD$ और $\angle BOC$ शीर्षाभिमुख कोण हैं तथा $\angle AOC = \angle BOD$ और $\angle AOD = \angle BOC$ अर्थात् शीर्षाभिमुख कोण बराबर होते हैं।

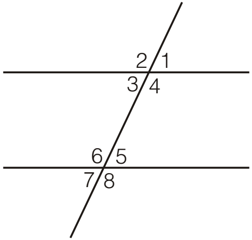
■ जब कोई तिर्यक् रेखा दो रेखाओं को काटती है, तो कुल आठ कोण बनते हैं।



दिए गए चित्र में कोण

1. 1 व 5, 2 व 6, 3 व 7, 4 व 8 संगत कोण (Corresponding Angles) हैं।
2. 3 व 5, 4 व 6 एकान्तर कोण (Alternate Angles) हैं।
3. 3, 4, 5, 6 अन्त: कोण (Interior Angles) हैं।
4. 1, 2, 7, 8 बहिष्कोण (Exterior Angles) हैं।

■ यदि दो समान्तर रेखाओं को एक तिर्यक् रेखा काटे तो

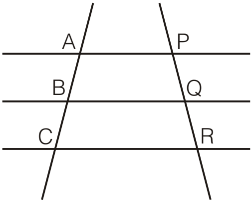


1. संगत कोण बराबर होते हैं अर्थात् कोण
   1 = 5, 2 = 6, 3 = 7, 4 = 8

©Adda247 Publications

2. एकान्तर कोण बराबर होते हैं अर्थात् कोण
   3 = 5, 4 = 6
3. एक ओर के अन्त: कोणों का योग दो समकोणों के बराबर होता है, अर्थात् कोण 4 + 5 = 180°, 3 + 6 = 180°

- यदि दो रेखाएँ परस्पर प्रतिच्छेद करती हैं, तो शीर्षाभिमुख कोण (Vertically Opposite Angle) बराबर होते हैं।
- यदि एक किरण एक रेखा पर खड़ी हो, तो इस प्रकार बने दो आसन्न कोणों का योग 180° होता है तथा इसका विलोम भी सत्य है।
- यदि एक तिर्यक् रेखा (Transverse line) दो समांतर रेखाओं को प्रतिच्छेद करें, तो संगत कोण (Corresponding Angle) बराबर होते हैं तथा इसका विलोम भी सत्य है।
- यदि एक तिर्यक् रेखा दो समांतर रेखाओं को प्रतिच्छेद करें, तो एकांतर कोण (Alternate Angle) का प्रत्येक युग्म बराबर होता है तथा इसका विलोम भी सत्य है।
- यदि एक तिर्यक् रेखा दो समांतर रेखाओं को प्रतिच्छेद करें तो तिर्यक् रेखा के एक ही ओर के अन्त: कोणों का योग सम्पूरक (योग 180°) होता है तथा इसका विलोम भी सत्य है।
- एक सरल रेखा पर अनंत बिन्दु होते हैं।
- दो विभिन्न बिन्दुओं से एक और केवल एक सरल रेखा खींची जा सकती है।
- यदि दो रेखाखण्ड $\overline{AB}$ एवं $\overline{CD}$ एक ही लम्बाई के हों, तो दोनों सर्वांगसम होते हैं।
- यदि दो कोणों की माप बराबर हो, तो दोनों कोण सर्वांगसम होते हैं।
- तीन समानान्तर रेखाओं को दो तिर्यक् रेखा समान अनुपात में विभाजित करती है, अर्थात् $\frac{AB}{BC}=\frac{PQ}{QR}$



■ ज्यामिति में सरलता के लिए कुछ संकेतों का व्यवहार किया जाता है, जिनमें से कुछ प्रमुख निम्न हैं

चिह्न	लिखने का ढंग	अर्थ
$\leftrightarrow$	$\overleftrightarrow{AB}$	सरल रेखा AB
$\rightarrow$	$\overrightarrow{AB}$	किरण AB
$-$	$\overline{AB}$	रेखाखण्ड AB
l	$l(AB)$	रेखाखण्ड AB की लम्बाई
$\angle$	$\angle ABC$	कोण ABC
$m\angle$	$m\angle ABC$	कोण ABC की माप
Δ	ΔABC	त्रिभुज ABC
$\cong$	$\Delta ABC \cong \Delta DEF$	ΔABC तथा ΔDEF सर्वांगसम हैं।
$>$	$AB > DE$	रेखाखण्ड AB की लम्बाई रेखाखण्ड DE से अधिक है।
$<$	$AB < DE$	रेखाखण्ड AB की लम्बाई रेखाखण्ड DE से कम है।
$=$	$AB = DE$	रेखाखण्ड AB और रेखाखण्ड DE लम्बाई में बराबर है।

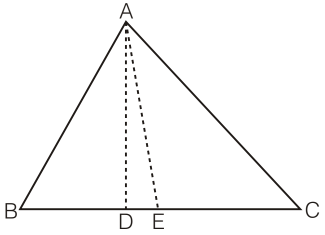
©Adda247 Publications

$\perp$	$AB \perp CD$	रेखा AB रेखा CD पर लम्ब है।
$\|\|$	$AB \|\| CD$	रेखा AB रेखा CD के समान्तर हैं।
$\|\|=$	$AB \|\|= CD$	रेखा AB तथा CD एक-दूसरे के समान्तर और बराबर हैं।
$\frown$	$\overset{\frown}{AB}$	चाप AB

4. त्रिभुज (Triangle)

I. अवधारणा (Concepts)

■ तीन सरल रेखाओं से घिरी समतल आकृति को त्रिभुज (Triangle) कहते हैं। इन रेखाओं को त्रिभुज की भुजाएँ (Sides) कहते हैं। रेखाओं के प्रतिच्छेद बिन्दुओं को शीर्ष बिन्दु (Vertices) कहते हैं। त्रिभुज को डेल्टा (Δ-Delta) से प्रदर्शित करते हैं। त्रिभुज में तीन भुजाएँ, तीन कोण तथा तीन शीर्ष बिन्दु होते हैं।



दिए गए चित्र में ABC एक त्रिभुज है, जिसकी भुजाएँ AB, BC तथा AC हैं, कोण $\angle A, \angle B$ तथा $\angle C$ हैं और शीर्ष बिन्दु A, B तथा C हैं।

साधारणतया, क्षैतिज भुजा को त्रिभुज का आधार (base) और उसके सामने के कोण को शीर्ष कोण (Vertical Angle) कहते हैं। यहाँ दिए गए चित्र में BC को आधार तथा $\angle A$ को शीर्ष कोण कहेंगे। ज्ञातव्य तथ्य यह है कि आधार सदैव क्षैतिज भुजा ही नहीं होता है। AC को आधार

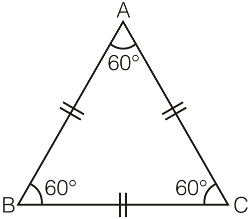
और कोण $\angle B$ को शीर्ष कोण या AB को आधार और कोण $\angle C$ को शीर्ष कोण माना जा सकता है। शीर्ष से सम्मुख भुजा अर्थात् आधार पर डाले गये लम्ब को त्रिभुज की ऊँचाई (height) कहते हैं। BC आधार और शीर्ष कोण $\angle A$ के लिए यह ऊँचाई AD है। शीर्ष बिन्दुओं और सम्मुख भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखाएँ माध्यिकाएँ (Medians) कहलाती हैं। दिए गए चित्र में AE त्रिभुज की एक माध्यिका है।

II. त्रिभुज के प्रकार (Kind of Triangle)

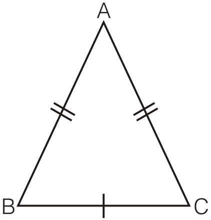
- भुजाओं के आधार पर त्रिभुज निम्न तीन प्रकार के होते हैं

1. समबाहु त्रिभुज (Equilateral Triangle) : यदि त्रिभुज की तीनों भुजाएँ समान हों, तो उसे समबाहु त्रिभुज कहते हैं। इस त्रिभुज का प्रत्येक कोण 60° का होता है।

दिए गए चित्र में ΔABC एक समबाहु त्रिभुज है, जिसमें $AB = BC = AC$ है।



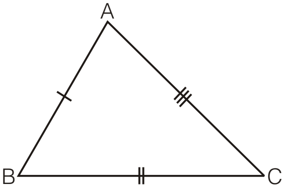
2. समद्विबाहु त्रिभुज (Isosceles Triangle) : यदि किसी त्रिभुज की दो भुजाएँ बराबर हों, तो उसे समद्विबाहु त्रिभुज कहते हैं।



दिए गए चित्र में ΔABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है, जिसमें $AB = AC$ है।

©Adda247 Publications

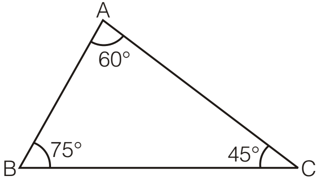
3. **विषमबाहु त्रिभुज** (Scalene Triangle) : यदि किसी त्रिभुज की तीनों भुजाएँ असमान हों, तो उसे विषमबाहु त्रिभुज कहते हैं।



दिए गए चित्र में ΔABC एक विषमबाहु त्रिभुज है, जिसमें $AB \neq BC \neq AC$ है।

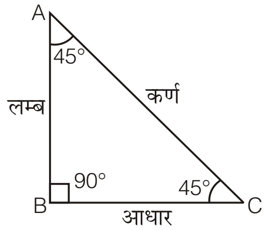
- कोणों के आधार पर भी त्रिभुज निम्न तीन प्रकार के होते हैं

1. **न्यूनकोण त्रिभुज** (Acute Angled Triangle) : यदि त्रिभुज के तीनों कोण न्यूनकोण हों, तो उस त्रिभुज को न्यूनकोण त्रिभुज कहते हैं।



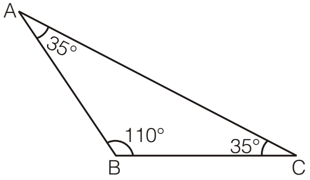
दिए गए चित्र में ΔABC एक न्यूनकोण त्रिभुज है।

2. **समकोण त्रिभुज** (Right Angled Triangle) : यदि त्रिभुज का एक कोण समकोण अर्थात् 90° का हो, तो उसे समकोण त्रिभुज कहते हैं। समकोण के सामने की भुजा को कर्ण (Hypotenuse) कहते हैं तथा अन्य दो भुजाओं में से एक को आधार (Base) एवं दूसरे को लम्ब (Perpendicular) कहते हैं। किसी त्रिभुज में अधिकतम एक ही समकोण हो सकता है।



दिए गए चित्र में ΔABC एक समकोण त्रिभुज है, जिसमें $\angle B = 90°$ तथा AC कर्ण है। यदि BC को आधार कहेंगे तो AB को लम्ब कहेंगे अथवा AB को आधार कहेंगे, तो BC को लम्ब कहेंगे।

3. **अधिककोण त्रिभुज** (Obtuse Angled Triangle) : यदि त्रिभुज का एक कोण अधिककोण हो, तो उस त्रिभुज को अधिककोण त्रिभुज कहते हैं। किसी त्रिभुज में अधिकतम एक ही अधिककोण हो सकता है।



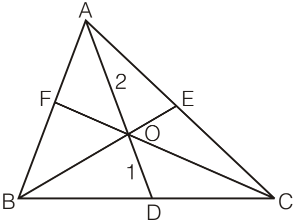
दिए गए चित्र में ΔABC एक अधिककोण त्रिभुज है, क्योंकि $\angle ABC$ अधिककोण है।

III. संगामी रेखाएँ (Concurrent Lines)

- वे रेखाएँ, जो एक ही बिन्दु से होकर जाती हैं, संगामी रेखाएँ (Concurrent Lines) कहलाती हैं। त्रिभुज के सम्बन्ध में निम्नलिखित रेखाएँ संगामी रेखाएँ होती हैं

©Adda247 Publications

1. **केन्द्रक** (Centroid) : त्रिभुज की माध्यिकाएँ (Medians) संगामी होती हैं और इनके प्रतिच्छेद बिन्दु को केन्द्रक (Centroid) कहते हैं, जो माध्यिकाओं को 2 : 1 के अनुपात में विभाजित करती हैं।

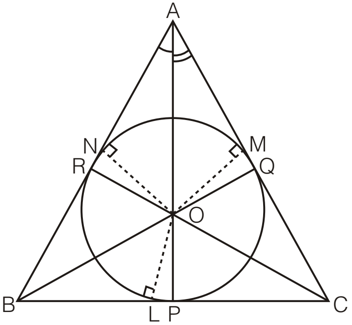


दिए गए चित्र में D, E, F भुजाओं BC, CA, AB के मध्य बिन्दु हैं; AD, BE, CF त्रिभुज ABC की माध्यिकाएँ हैं तथा O केन्द्रक है। यहाँ

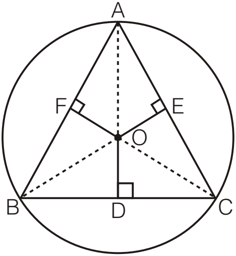
1. $\frac{AO}{OD}=\frac{BO}{OE}=\frac{CO}{OF}=\frac{2}{1}$ अर्थात् केन्द्रक माध्यिका को 2 : 1 के अनुपात में बाँटती है।
2. ΔAOC का क्षेत्रफल = ΔBOC का क्षेत्रफल = AOB का क्षेत्रफल अर्थात् केन्द्रक से शीर्षों को मिलाने वाली रेखा त्रिभुज को तीन बराबर भागों में बाँटती है। प्रत्येक भाग का क्षेत्रफल, त्रिभुज के क्षेत्रफल का एक-तिहाई होता है।

2. **अन्तः केन्द्र** (Incentre) : त्रिभुज के अन्त: कोणों के समद्विभाजक (Internal bisectors) संगामी होते हैं। इनके प्रतिच्छेद बिन्दु को अन्त: केन्द्र (Incentre) कहते हैं। इस बिन्दु से त्रिभुज की भुजाओं पर डाले गए लम्ब बराबर होते हैं। अत: इस बिन्दु को केन्द्र और उपयुक्त लम्ब को त्रिज्या लेकर खींचा गया वृत्त तीनों भुजाओं को स्पर्श करता हुआ जायेगा। इस वृत्त को अन्त: वृत्त (Inscribed circle) कहते हैं।

दिए गए चित्र में AP, BQ, CR कोणों A, B, C के समद्विभाजक हैं। O अन्त: केन्द्र है, LMN अन्त:वृत्त है तथा लम्ब $OL = OM = ON$ है।



3. **परिकेन्द्र** (Circumcentre) : त्रिभुज की भुजाओं के लम्ब अर्द्धक (Perpendicular bisectors) संगामी होते हैं। इनके प्रतिच्छेद बिन्दु को परिकेन्द्र कहते हैं। इस बिन्दु तथा त्रिभुज के शीर्ष बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखाएँ बराबर होती हैं। अतः इस बिन्दु को केन्द्र तथा उपयुक्त रेखा को त्रिज्या लेकर खींचा गया वृत्त, शीर्ष बिन्दुओं से होकर जायेगा। इस वृत्त को परिवृत्त (Circumcircle) कहते हैं।

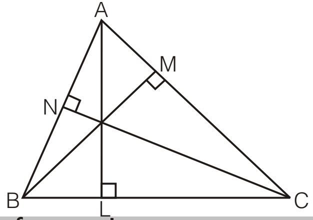


दिए गए चित्र में DO, EO, FO त्रिभुज ABC की भुजाओं BC, CA, AB के लम्ब अर्द्धक हैं। इनका प्रतिच्छेद बिन्दु O त्रिभुज का परिकेन्द्र है, ABC त्रिभुज का परिवृत्त है तथा $OA = OB = OC$ है।

©Adda247 Publications

4. **लम्ब केन्द्र** (Orthocentre) : त्रिभुज के शीर्ष बिन्दुओं से सम्मुख भुजाओं पर गिराये गये लम्ब संगामी होते हैं। इनके प्रतिच्छेद बिन्दु को लम्ब केन्द्र कहते हैं।

दिए गए चित्र में *AL, BM, CN* त्रिभुज के शीर्ष बिन्दुओं *A, B, C* से त्रिभुज की भुजाओं *BC, CA, AB* पर डाले गये लम्ब हैं तथा इनका प्रतिच्छेद बिन्दु *O* त्रिभुज का लम्ब केन्द्र है।



IV. त्रिभुज की सर्वांगसमता एवं समरूपता (Congruence and Similarity of Triangles)

- यदि दो त्रिभुज प्रत्येक दृष्टिकोण से बराबर हों और यदि एक त्रिभुज को दूसरे के ऊपर रख दिया जाए, तो वह उसे पूरा-पूरा ढक ले, तो इन त्रिभुजों को सर्वांगसम त्रिभुज (Congruent Triangles) कहते हैं। इसे '≅' से सूचित किया जाता है।

  इन त्रिभुजों के तीनों कोण और तीनों भुजाएँ अलग-अलग समान होती हैं तथा इनका क्षेत्रफल भी समान होता है।