Youth Competition Times

MATHS CAPSULE

Useful for All Competitive Exams :

Useful for : **RRB :** NTPC, GROUP-D, ALP, JE, RPF CONSTABLE, SI

SSC : CGL, CHSL, CPO-SI, GD, MTS, DELHI POLICE CONSTABLE

UPSSSC, PET, UPSI, UPP CONSTABLE, JAIL WARDEN, FIREMAN, RADIO OPERATOR, BIHAR SI/CONSTABLE, MP SI/CONSTABLE, RAJASTHAN SI/ CONSTABLE, HARYANA POLICE, DSSSB, HSSCE, TET, CTET, BANK, NAVODAY/ARMY SCHOOL, IB, NDA, CDS.

AGNIVEER : AIR FORCE X & Y, ARMY GD/CLERK, NAVY SSR/MR

And All Other Competitive Exams

Chief Editor
A.K. Mahajan

Compiled & Written by
Saurabh Khare

Computer Graphics by
Balkrishna & Pankaj Kushwaha

Editorial Office
12, Church Lane Prayagraj-211002
: 9415650134
Email : yctap12@gmail.com
website : www.yctbooks.com/www.yctfastbook.com/ www.yctbooksprime.com

Publisher Declaration
Edited and Published by A.K. Mahajan for YCT Publications Pvt. Ltd.
and E:Book by APP Youth Prime BOOKS In order to Publish the book,
full care has been taken by the Editor and the Publisher,
still your suggestions and queries are welcomed.
In case of any dispute, the judicial area will be Prayagraj.

विषय सूची (Index)

01 संख्या पद्धति
(Number System)

अंकों का विभाजन (Division of numbers)

संख्या (Numbers)

वास्तविक संख्या (Real number)
$-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$ ....
$\sqrt{16}, \pi \frac{22}{7}, 3, 4, -3, 5, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{2}, -\sqrt{3}$

समिश्र संख्या (Complex number)
$(a + ib)$
$(2 + 3i)$
$(2 - 7i)$

काल्पनिक संख्या (Imaginary number)
किसी ऋणात्मक संख्या का वर्गमूल
(Square root any negative number)
$i = \sqrt{-1}$
$i^2 = -1, i^4 = 1$
$4i, 5i$
$3i, 7i$

परिमेय संख्या (Rational number)
जिसे p/q रूप में लिखा जा सकता है
जहाँ $(q \neq 0)$

- $-5 = -\frac{5}{1}$
- $\frac{0}{1} = 0$
- $\frac{2}{1} = 2$
- $\sqrt{16} = \frac{4}{1} = 4$
- $\frac{22}{7}$
- $3.5 = \frac{35}{10}$
- $2.4 = \frac{24}{10}$

अपरिमेय संख्या (Irrational number)
जिसे p/q रूप में लिखा नहीं जा सकता

- $\sqrt{2} = 1.4142$..........
- $\sqrt{3} = 1.7320$..........
- $\sqrt{5} = 2.2360$..........
- $\pi = 3.14159$..........

पूर्णांक (Integers)
......$-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ ....

ऋण-पूर्णांक (Negative integers)
.......$-3, -2, -1$

शून्य (Zero)
0

धन-पूर्णांक (Positive integers)
1, 2, 3........

पूर्ण संख्या (Whole numbers)
0, 1, 2, 3, 4, 5, ...

प्राकृतिक संख्यायें (Natural numbers)
1, 2, 3, 4, 5, ...

इकाई संख्या (Unit number)
मात्र 1 गुणनखण्ड
(Only one factor)
$1 \Rightarrow 1$

अभाज्य या रूढ़ संख्या (Prime number)
मात्र 2 गुणनखण्ड
(Only two factors)
$2 \Rightarrow 1, 2$
$3 \Rightarrow 1, 3$
$5 \Rightarrow 1, 5$

भाज्य संख्या (Composite number)
2 से अधिक गुणनखण्ड
(More than two factors)
$4 \Rightarrow 1, 2, 4$
$6 \Rightarrow 1, 2, 3, 6$

विषम संख्या (Odd number)
(1, 3, 5, 7, ...)

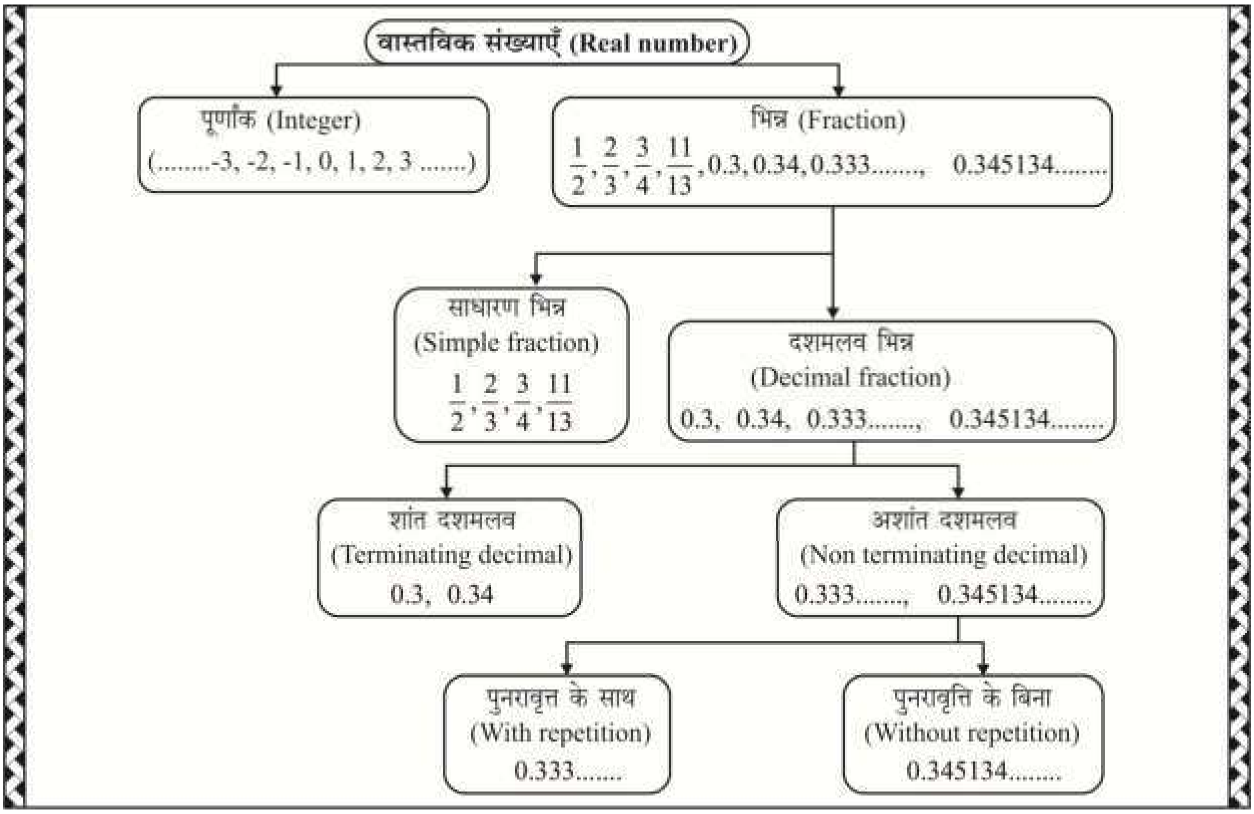
सम संख्या (Even number)
(2, 4, 6, 8 ....)

सह-अभाज्य/अपेक्षाकृत अभाज्य संख्या (Co-prime/Relatively prime number)

☞ संख्याओं का ऐसा युग्म जिसका म.स.प. 1 होता है, सह-अभाज्य संख्या कहलाती हैं। (A pair of numbers which H.C.F. (Highest common factor) is 1. is called co-prime number) **Ex.** (2, 3), (3, 4), (3, 5), (6, 7), (8, 11).

जुड़वा-अभाज्य संख्या (Twin-prime number)

☞ अभाज्य संख्याओं का ऐसा युग्म जिसमे 2 का अंतर होता है, जुड़वा-अभाज्य संख्या कहलाती हैं। (A pair of prime numbers in which the difference is two is called twin prime number) Ex. (3, 5), (5, 7), (11, 13)



☞ पुनरावृत्ति के साथ वाले दशमलव को परिमेय संख्या के रूप में व्यक्त कर सकते हैं। (Decimals with repetition can be expressed as rational numbers).

अभाज्य या रूढ़ संख्याओं की पहचान
(The test of prime number)

■ माना 'a' कोई दी गयी संख्या है तथा 'n' वह छोटी से छोटी प्राकृतिक संख्या है, (Let a is any give number and n is the smallest natural number).

जहाँ (where), $\boxed{n^2 \geq a}$

अब दी गयी संख्या को 'n' तथा इससे छोटी प्रत्येक अभाज्य संख्या से विभक्त करके देखे। यदि इनमें से किसी भी संख्या से 'a' पूर्णतः विभक्त नहीं होता है तब 'a' एक अभाज्य संख्या होगी, अन्यथा नहीं।

Now divide the given number by 'n' and smaller than each prime number. If 'a' is not completely divisible by any of these numbers, then 'a' will be a prime number otherwise not.

Ex. 241 का परीक्षण (Test of 241)–

$241 \Rightarrow 16^2 \geq 241$

16 से छोटी अभाज्य संख्याएँ (Prime number less than 16)
= 2, 3, 5, 7, 11, 13

$\because$ 241, 16 से छोटी किसी भी अभाज्य संख्या से विभक्त नहीं है। (241 is not divisible by any prime number less than 16)

$\therefore$ 241 अभाज्य संख्या है।
(241 is a prime number).

Ex. 437 का परीक्षण (Test of 437)–

$437 \Rightarrow 21^2 \geq 437$

21 से छोटी अभाज्य संख्याएँ (Prime number less than 21)
= 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19,

$\because$ 437, 19 से पूर्णतः विभाज्य है। (437 is completly divisible by 19)

$\therefore$ 437 एक भाज्य संख्या है।
(437 is a composite number).

अभाज्य संख्याओं की संख्या
(Number of prime numbers)

1-10 के बीच अभाज्य संख्या (Prime numbers between 1-10)	**4**
1-50 के बीच अभाज्य संख्या (Prime numbers between 1-50)	**15**
1-100 के बीच अभाज्य संख्या (Prime numbers between 1-100)	**25**
1-200 के बीच अभाज्य संख्या (Prime numbers between 1-200)	**46**
1-1000 के बीच अभाज्य संख्या (Prime numbers between 1-1000)	**168**

☞ प्रथम अभाज्य संख्या (First prime number) = 2

☞ प्रत्येक अभाज्य संख्या को (6k ± 1) के रूप में लिखा जा सकता है। लेकिन प्रत्येक (6k ± 1) आवश्यक रूप से अभाज्य संख्या नहीं हो सकती है।

Each prime number can be written as (6k ± 1) form. But every (6k ± 1) from may not be necessarily prime number.

Ex. $(6 \times 2 - 1) = 13$ अभाज्य संख्या (Prime number)

$25 = (6 \times 4 + 1)$ भाज्य संख्या (Composite number)

विभाजिता के नियम (Divisibility Rules)

2, 4, 8 तथा 16 की विभाजिता (Divisibility of 2, 4, 8 and 16)

- **2 की विभाजिता (Divisibility of 2)–:** यदि किसी संख्या का इकाई (अंतिम) का अंक या तो '0' हो या 2 से विभाज्य हो तो वह संख्या 2 से विभाज्य होगी।
If the digit at unit place of a number is either '0' or divisible by 2, then the number is divisible by 2.
Ex. 8570, 7242, 9376
- **4 की विभाजिता (Divisibility of 4)–:** यदि किसी संख्या के अन्तिम दो अंक (इकाई, दहाई) या तो '00' हो या 4 से विभाज्य हो तो वह संख्या 4 से विभाज्य होगी।
If the last two digits (ten's place, units place) of a number is either '00' or divisible by 4, then the number is divisible by 4.
Ex. 8700, 6924, 6376
- **8 की विभाजिता (Divisibility of 8)–:** यदि किसी संख्या के अन्तिम तीन अंक (इकाई, दहाई, सैकड़ा), या तो '000' या 8 से विभाज्य हो, तो संख्या 8 से विभाज्य होगी।
If the last three digits (Hundred's place, ten's place, units place) of a number is either '000' or divisible by 8, then the number is divisible by 8.
Ex. 63000, 9248, 7464
- **16 की विभाजिता (Divisibility of 16)–:** यदि किसी संख्या के अन्तिम चार अंक (इकाई, दहाई, सैकड़ा, हजार), या तो '0000' या 16 से विभाज्य हो, तो संख्या 16 से विभाज्य होगी।
If the last three digits (Thousand's place, hundred's place, ten's place, units place) of a number is either '0000' or divisible by 16, then the number is divisible by 16.
Ex. 630000, 948464

☞ 2 की विभाजिता (Divisibility of 2)

$2^1 = 2$ अंतिम अंक (Last digit)

☞ 4 की विभाजिता (Divisibility of 4)

$2^2 = 4$ अंतिम 2 अंक (Last 2 digits)

☞ 8 की विभाजिता (Divisibility of 8)

$2^3 = 8$ अंतिम 3 अंक (Last 3 digits)

☞ 16 की विभाजिता (Divisibility of 16)

$2^4 = 16$ अंतिम 4 अंक (Last 4 digits)

3 तथा 9 की विभाजिता (Divisibility of 3 and 9)

- **3 की विभाजिता (Divisibility of 3) –:** यदि किसी संख्या के अंकों का योग 3 से विभाज्य है तो वह संख्या 3 से विभाज्य होगी।
If the sum of its all digits of a number is divisible by 3, then the number is divisible by 3.
Ex. 78141
$$\Rightarrow \frac{7+8+1+4+1}{3} = \frac{21}{3} = 7 \text{ (विभाज्य/divisible)}$$
अतः संख्या 78141, 3 से विभाज्य होगी। (Hence, the number 78141 will be divisible by 3)
Ex. 246753
$$\Rightarrow \frac{2+4+6+7+5+3}{3} = \frac{27}{3} = 9 \text{ (विभाज्य/divisible)}$$
अतः संख्या 246753, 3 से विभाज्य होगी। (Hence, the number 246753 will be divisible by 3)
- **9 की विभाजिता –:** यदि किसी संख्या के अंकों का योग 9 से विभाज्य है तो वह संख्या 9 से विभाज्य होगी।
If the sum of its all digits of a number is divsible by 9, then the number is divisible by 9)

Ex. 764352
$$\Rightarrow \frac{7+6+4+3+5+2}{9} \quad \frac{27}{9} = 3 \text{ (विभाज्य/divisible)}$$
अतः संख्या 764352, 9 से विभाज्य होगी। (Hence, the number 764352 will be divisible by 9)

Ex. 432432
$$\Rightarrow \frac{4+3+2+4+3+2}{9} = \frac{18}{9} = 2 \text{ (विभाज्य/divisible)}$$
अतः संख्या 432432, 9 से विभाज्य होगी। (Hence, the number 432432 will be divisible by 9)

☞ 3 और 9 की विभाजिता में, योग के स्थान पर 'अंकीय योग' (Digital sum) का प्रयोग कर सकते हैं।
In divisibility of 3 and 9, we can use 'digital sum' in place of sum.

अंकीय योग (Digital sum)– यह केवल शेषफल की स्थिति है जब इसे 9 से विभाजित किया जाता है। अर्थात् अंकों का योग 9 होना चाहिए। 9 से अधिक होने पर अंको को आपस में जोड़ देते हैं।
It is just a position of remainder when it is divided by 9. That is, the sum of the digits should be 9. If it is more than 9 then add the digits together.

Ex. $10 \xrightarrow{\text{Digital sum}} 1+0=1$

$11 \xrightarrow{\text{Digital sum}} 1+1=2$

$84 \xrightarrow{\text{Digital sum}} 8+4=12 \quad 1 \quad 2 \quad 3$

$786 \xrightarrow{\text{Digital sum}} 7+8+6=21 \quad 2 \quad 1 \quad 3$

☞ उन सभी अंकों को काट दें जिनका योग 9 है। (Cut all digits whose sum is 9)

☞ एक पूर्ण वर्ग संख्या का डिजिटल योग 0 या 9, 1, 4, 7 है। (Digital sum of a perfect square number 0 or 9, 1, 4, 7)

☞ अंश संख्या में डिजिटल योग की गणना करने के लिए हमेशा हर में डिजिटल योग 1 बनाएं।

To calculate digital sum in fraction number, then always make digital sum 1 in denominator.

हर (Demominator)	गुणक (Multiply)	अंकीय योग (Digital sum)
4	**4 × 7 = 28**	**1**
7	**7 × 4 = 28**	**1**
5	**5 × 2 = 10**	**1**
2	**2 × 5 = 10**	**1**
8	**8 × 8 = 64**	**1**

Note– यदि किसी संख्या का हर 3, 6 या 9 है, तो अंकीय योग के लिए 1 नहीं बना सकते हैं। (If the denominator of a number is 3, 6 or 9 then 1 can not be made for the digital sum).

5, 10, 25 और 100 की विभाजिता
(Divisibility of 5, 10, 25 and 100)

■ **5 की विभाजिता (Divisibility of 5) –:** यदि किसी संख्या का इकाई का अंक 0 या 5 है तो वह संख्या 5 से विभाज्य होगी।

If the digit at unit place of a number is either 0 or 5 then the number is divisible by 5.

Ex. 24520, 28735

■ **10 की विभाजिता (Divisibility of 10) –:** यदि किसी संख्या का इकाई का अंक शून्य है तो वह संख्या 10 से विभाज्य होगी।

If the digit at unit place of a number is 0 then the number is divisible by 10.

Ex. 570120, 4567890

■ **25 की विभाजिता (Divisibility of 25) –:** यदि किसी संख्या के अंतिम दो अंक (दहाई, इकाई) 25, 50, 75 या 00 हो तो वह संख्या 25 से विभाज्य होगी।

If the last two digits (ten's, unit's place) of a number either 25, 50, 75 or 00, then the number is divisible by 25.

Ex. 8725, 68750, 931275, 8600

■ **100 की विभाजिता (Divisibility of 100) –:** यदि किसी संख्या के अंतिम दो अंक (दहाई, इकाई) 00 हो तो वह संख्या 100 से विभाज्य होगी।

If the last two digits (ten's, unit's place) of a number 00, then the number is divisible by 100.

Ex. 689200

■ **7 की विभाजिता (Divisibility of 7) –:** किसी संख्या के इकाई के अंक को छोड़कर शेष बची, संख्या से इकाई के अंक के दुगने को घटाने पर प्राप्त संख्या यदि 7 से विभाज्य है तो वह संख्या 7 से विभाज्य होगी। बड़ी संख्याओं के लिए यह क्रिया बार-बार दोहराते है।

If the number obtained by subtracting twice the unit digit from the remaining number excluding the unit digit, is divisible by 7, then that number will be divisible by 7. Repeat this process again and again for larger numbers.

Ex. 343

$$\begin{array}{r|l} 34 & 3 \\ -6 & \times 2 \\ \hline 28 & \end{array} \Rightarrow \frac{28}{7} = \text{पूर्णांक}$$

अतः 343, 7 से विभाज्य है।

(Hence, 343 is divisible by 7)

Ex. 383838

$$\begin{array}{r|l} 38383 & 8 \\ 16 & \times 2 \\ \hline 3836 & 7 \\ 14 & \times 2 \\ \hline 382 & 2 \\ 4 & \times 2 \\ \hline 37 & 8 \\ 16 & \\ \hline 21 & \end{array} \Rightarrow \frac{21}{7} = 3 \text{ पूर्णांक}$$

अतः 383838, 7 से विभाज्य है।

(Hence, 383838 is divisible by 7)

■ **11 की विभाजिता (Divisibility of 11)–:** यदि किसी संख्या के समस्थानों के अंकों योग, विषम स्थानों के अंकों का योग, का अंतर या तो शून्य हो या 11 का गुणज हो, तो वह संख्या 11 से विभाज्य होगी।

If the difference of the sum of the digits in even position and the sum of the digits in odd position is zero or multiple of 11.

Ex. $\overline{3}\underline{5}\overline{2}\underline{1}\overline{4}\underline{3}$

समस्थानों का योग (Sum of even position) = 4 + 2 + 3 = 9

विषम स्थानों का योग (Sum of odd position) = 3 + 1 + 5 = 9

$$\Rightarrow |9-9| = 0$$

अतः संख्या 352143, 11 से पूर्णतः विभक्त होगी।

(Hence, the number 352143 is divisible by 11)

Ex. $\underline{7}\overline{1}\underline{9}\overline{4}\underline{0}$

समस्थानों का योग (Sum of even position) = 4 + 1 = 5

विषम स्थानों का योग (Sum of odd position) = 0 + 9 + 7 = 16

$$\Rightarrow \frac{|5-16|}{11} = 1 \text{ (पूर्ण संख्या)}$$

अतः संख्या 71940, 11 से पूर्णतः विभक्त होगी।

(Hence, the number 71940 is divisible by 11)

7, 11 और 13 की विभाजिता (Divisibility of 7, 11, 13)

■ किसी संख्या के दाहिने तरफ से 3-3 अंकों के जोड़े बनाये। समस्थानों के युग्मों का योग तथा विषम स्थानों के युग्मों का योग का अंतर निकालें–

Make pairs of three digits from the right side of a numbers. Find the difference between sum of pairs at even places and sum of pairs at odd places–

☞ यदि अंतर 0 आयेगा तो संख्या 7, 11 और 13 से विभाज्य होगी।

If the difference is 0, then the number will be divisible by 7, 11 and 13.

☞ यदि अंतर 7, 11 और 13 में से जिस-जिस से विभाज्य होगी तब संख्या भी उसी से विभाज्य होगी।

If the difference is divisible by any of 7, 11 and 13, then the number will also be divisible by that.

Ex. 786786

786 786 = |786 – 786| $\Rightarrow$ 0

अतः संख्या 7, 11 और 13 से विभाज्य होगी।

Hence, the number is divisible by 7, 11 and 13.

Ex. 1001

001 001 = |001 – 001| $\Rightarrow$ 0

अतः संख्या 7, 11 और 13 से विभाज्य होगी।

Hence, the number is divisible by 7, 11 and 13.

Ex. 786730

786 730 = |786 – 730|

$\Rightarrow$ 56 (7 से विभाज्य/Divisible by 7)

अतः संख्या 7 से विभाज्य होगी।

Hence, the number is divisible by 7

Ex. 5786

005 786 = |005 – 786|

$\Rightarrow$ 781 (11 से विभाज्य/Divisible by 11)

अतः संख्या 11 से विभाज्य होगी।

Hence, the number is divisible by 11

Ex. 91689

091 689 = |091 – 689|

$\Rightarrow$ 598 (13 से विभाज्य/Divisible by 13)

अतः संख्या 13 से विभाज्य होगी।

Hence, the number is divisible by 13

Ex. 786709

786 709 = |786 – 709|

$\Rightarrow$ 77 (7 और 11 से विभाज्य/Divisible by 7 and 11)

अतः संख्या 7 और 13 से विभाज्य होगी।

Hence, the number is divisible by 7 and 13.

■ जब कोई संख्या किसी अन्य संख्या से विभाज्य है, तो वह उस (अन्य) संख्या के गुणनखण्ड से भी विभाज्य होगी।

When a number is divisible by another number, It is also divisible by the factor of the number.

Ex. 48, 12 से विभाज्य है। (48 is divisible by 12)

तब 12 के गुणनखण्ड (1, 2, 3, 4, 6, 12) से भी 48 विभाज्य होगा। (Then, 48 is also divisible by factor (1, 2, 3, 4, 6, 12) of 12).

■ जब कोई संख्या दो या दो से अधिक सहअभाज्य संख्याओं से विभाज्य हो तो वह संख्या उनके गुणनफल से भी विभाज्य होगी।

When a number is divisible by two or more co-prime numbers, It is also divisible by their products.

Ex. 12, 2 तथा 3 से विभाज्य है। (12 is divisible by 2 and 3)

$\because$ (2, 3) $\rightarrow$ सहअभाज्य संख्याएं हैं। (Co-prime number)

$\therefore$ 12, (2 × 3) से भी विभाज्य होगा। (12 is divisilbe by (2 × 3).

■ जब कोई संख्या, दी गयी किन्हीं दो संख्याओं का गुणनखण्ड हो, तो वह संख्या उन दो संख्याओं के योग और अंतर का भी गुणनखण्ड होगी।

When a number is a factor of two given number It is also a factor of their sum and difference.

Ex. $\because$ 6, 30 का गुणनखण्ड है। (6 is factor of 30)

तथा 6, 18 का गुणनखण्ड है। (and 6 is factor of 18)

तब 6, {(30 + 18) = 48} और {(30 – 18) = 12} का गुणनखण्ड होगा।

Then, 6 is factor of {(30 + 18) = 48} and {(30 – 18) = 12}

■ जब कोई संख्या, किसी अन्य संख्या का गुणनखण्ड है, तो वह संख्या, उस (अन्य) संख्या के गुणज का भी गुणनखण्ड होगी।

When a number is a factor of another number, It is also a factor of any multiple of that number.

Ex. $\because$ 4, 12 का गुणनखण्ड है। (4 is factor of 12)

तब 4, 12 के गुणज (12, 24, 36, ...) का भी गुणनखण्ड होगा।

Then, 4 is also factor of multiple (12, 24, 36, ...) of 12.

☞ यदि कोई संख्या एक अंक की 6 बार पुनरावृत्ति से बनी है। तो वह 3, 7, 11, 13, 37 से विभाज्य होगी।

If a number is formed by repeating a digit six times, it will be divisible by 3, 7, 11, 13, 37.

Ex. (111111), (222222), (333333)

☞ यदि कोई संख्या दो अंकों की तीन बार पुनरावृत्ति से बनी है तो वह 3, 7, 13, 37 से विभाज्य होगी।

If a number is formed by repeating 2 digit 3 times, it will be divisible by 3, 7, 13, 37.

Ex. 383838, 171717, 595959

☞ यदि किसी संख्या में 3, 6, 9 या 12 (3 के गुणज) में बार समान अंकों की पुनरावृत्ति होती है तो वह संख्या 3 तथा 37 से विभाज्य होगी।

If a number repeats the same digit 3, 6, 9, 12 (multiple of 3), then that number will be divisible by 3 and 37.

Ex. (111), (222222), (333333333), (444444444444)

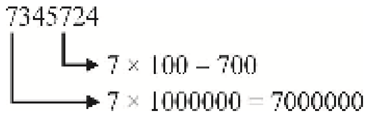
स्थानीयमान तथा जातीयमान
(Place value and face value)

स्थानीयमान (Place value)–: किसी दी गयी संख्या में किसी अंक का स्थानीयमान उसके स्थान का वर्णन करता है।

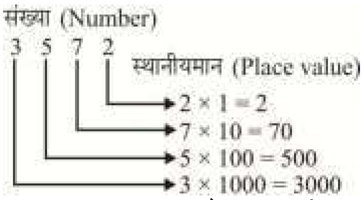
The place value of a digit describes its place in a given number.

Ex. संख्या 7345724 में 7 का स्थानीयमान है–

Place value of 7 in number 7345724–



Ex.



Ex. 'ग्यारह हजार ग्यारह सौ ग्यारह' को अंकों में लिखो–

Write 'Eleven thousand eleven hundred eleven' in digits–

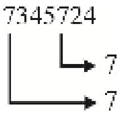
$$\begin{array}{r} 11000 \\ 1100 \\ +\ \ 11 \\ \hline 12111 \end{array}$$

जातीयमान (Face value)–: किसी संख्या में किसी अंक का जातीय मान उसका अपना मान है। इसका मान स्थान पर निर्भर नहीं करता है।

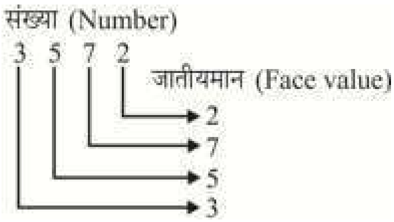
Face value is the value of the digit itself in a number. It does not depend upon its position in the number.

Ex. संख्या 7345724 में 7 का जातीयमान है–

Face value of 7 in number 7345724–



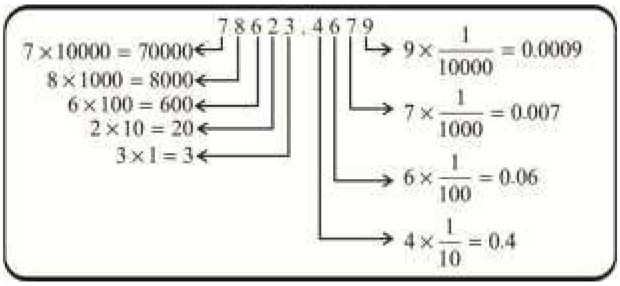
Ex.



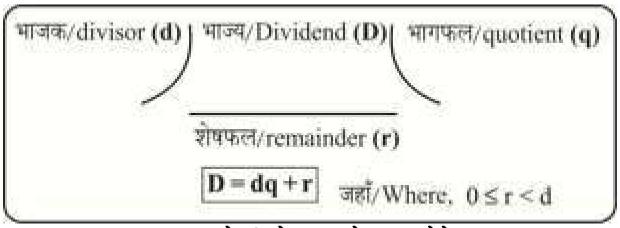
☞ शून्य का स्थानीयमान के साथ-साथ जातीय मान भी शून्य होता है। (The face value as well as place value of zero is always zero).

दशमलव संख्या का स्थानीय मान

(Place value of a decimal number)



संख्याओं में भाग संक्रियाएँ
(Division operation in numbers)



Ex. वह संख्या ज्ञात करो जिसे 15 से भाग देने पर भागफल 14 और शेषफल 13 प्राप्त हो?

Find the number in which dividing by 15 gives quotient 14 and remainder 13?

Solve– $D = dq + r$

$D = 15 \times 14 + 13$

$\mathbf{D = 223}$

Ex. किसी संख्या को जब 11 तथा 5 से उत्तरोतर भाग दिया जाता है, तो शेषफल क्रमशः 2 तथा 3 बचता है, उसी संख्या को 55 से भाग देने पर शेषफल कितना प्राप्त होगा?

By dividing a number by 11 and 5 successively, the remainder remains 2 and 3 respectively, what will be the remainder if the number is divided by 55?

Solve– $\because$ $11 \times 5 = 55$

11 और 5, 55 के गुणनखण्ड हैं

(11 and 5 are factors of 55)

$\therefore$ $D = 11 \times 3 + 2$

$\mathbf{D = 35}$

Ex. जब दो अलग-अलग संख्याओं को किसी भाजक से भाग देने पर शेषफल क्रमशः 547 एवं 349 आता है। जब उसी भाजक से दोनों संख्याओं के योग में भाग दें तो शेषफल 211 आता है, भाजक ज्ञात कीजिए?

When two different number are divided by a divisor, the remainder becomes 547 and 349 respectively when the sum of both numbers is divided by the same divisor, the remainder is 211, find the divisor.

Solve–

माना, प्रथम भागफल (First quotient) = q_1

द्वितीय भागफल (Second quotient) = q_2

उभयनिष्ठ भाजक (Common divisor) = d

$\therefore$ प्रथम संख्या (First number) = $dq_1 + 547$

द्वितीय संख्या (Second number) = $dq_2 + 349$

then, $\dfrac{(dq_1 + 547) + (dq_2 + 349)}{d} \xrightarrow{\text{Remainder}} 211$

$\therefore$ $d = 547 + 349 - 211$

$\mathbf{d = 685}$

Ex. किसी संख्या को 441 से भाग देने पर शेषफल 40 बचता है। उसी संख्या को 21 से भाग देने पर शेषफल कितना बचेगा?

When a number is divided by 441, the remainder is 40. If the same number is divided by 21, the remainder will be?

Solve–

$\because$ 21, 441 का एक गुणनखण्ड है (21 is the factor of 441)

$\therefore \dfrac{40}{21} \xrightarrow{\text{Remainder}} \mathbf{19}$

अतः शेषफल 19 होगा।

Hence, the remainder will be 19.

Ex. किसी संख्या को 231 से भाग देने पर शेषफल 45 बचता है। उसी संख्या को 17 से भाग देने पर शेषफल कितना होगा?

When a number is divided by 231, the remainder is 45. If the same number is divided by 17, the remainder will be?

Solve–

$\because$ 17, 231 का गुणनखण्ड नहीं है। (17 is not the factor of 231)

$\therefore$ शेषफल ज्ञात नहीं किया जा सकता है। (The remainder can not be determined)

इकाई का अंक (Unit digit)

■ **किसी संख्या का अंतिम अंक, इकाई का अंक कहलाता है। (The last digit of a number is called the unit digit).**

4364357
↳ इकाई का अंक (Unit digit)

☞ 763 + 542 ⇒ 1305
↳ इकाई का अंक (Unit digit)

☞ 765 + 849 ⇒ 1614
↳ इकाई का अंक (Unit digit)

☞ 763 – 542 ⇒ 221
↳ इकाई का अंक (Unit digit)

☞ 765 – 347 ⇒ 418
↳ इकाई का अंक (Unit digit)

☞ 765 – 947 ⇒ –182
↳ इकाई का अंक (Unit digit)

☞ 765 – 943 ⇒ –178
↳ इकाई का अंक (Unit digit)

☞ घटाव वाले प्रश्नों में इकाई का अंक निकालते समय बड़ी संख्या में से छोटी संख्या को घटाते हैं। (In subtraction problems, while finding the unit digit, the smaller number is subtracted from the larger number).

☞ प्राप्त उत्तर का अंतिम अंक, इकाई का अंक होगा। प्राप्त उत्तर धनात्मक या ऋणात्मक हो सकता है लेकिन इकाई का अंक नहीं। (The last digit of the answer obtained will be unit digit. The answer obtained can be positive or negative, but not the unit digit).

इकाई का अंक निकालना जब संख्या में घात लगी हो
(Finding the unit digit when number is rised to the power)

■ **जब किसी संख्या का इकाई अंक (0, 1, 5, 6) हो तो उस पर कोई भी घात हो तब उसका इकाई का अंक वही होगा। (When the unit digit of a number is 0, 1, 5 and 6 and it has any power, then its unit digit will be the same digit).**

☞ (1530)[illegible]
↳ इकाई का अंक (Unit digit)

☞ (761)[illegible]
↳ इकाई का अंक (Unit digit)

☞ (765)[illegible]
↳ इकाई का अंक (Unit digit)

☞ (756)[illegible]
↳ इकाई का अंक (Unit digit)

■ **जब किसी संख्या का इकाई का अंक (2, 3, 4, 7, 8, 9) हो तथा उस पर कोई घात हो तब इकाई का अंक निकालना–**

When the unit digit of a number is 2, 3, 4, 7, 8, and 9 and it has any power, then find the unit digit–

☞ घात के अंतिम दो अंकों को 4 से भाग देकर शेषफल प्राप्त करते हैं। (Divid last two digits of power by 4 and find out remainder)

$$\frac{\text{घात के अंतिम दो अंक (Last two digits of power)}}{4}$$

शेषफल (Remainder) ⇒ 1, 2, 3, 0

शेषफल (Remainder)	घात (Power)
1	1
2	2
3	3
0	4

☞ [172][illegible]

$\dfrac{25}{4} \xrightarrow[\text{(Remainder)}]{\text{शेषफल}} 1 \xrightarrow[\text{(Power)}]{\text{घात}} 1$

$2^1 \Rightarrow 2$
↳ इकाई का अंक (Unit digit)

☞ [978][illegible]

$\dfrac{98}{4} \xrightarrow[\text{(Remainder)}]{\text{शेषफल}} 2 \xrightarrow[\text{(Power)}]{\text{घात}} 2$

$8^2 \Rightarrow 64$
↳ इकाई का अंक (Unit digit)

☞ [567][illegible]

$\dfrac{59}{4} \xrightarrow[\text{(Remainder)}]{\text{शेषफल}} 3 \xrightarrow[\text{(Power)}]{\text{घात}} 3$

$7^3 \Rightarrow 343$
↳ इकाई का अंक (Unit digit)

☞ [6543][illegible]

$\dfrac{72}{4} \xrightarrow[\text{(Remainder)}]{\text{शेषफल}} 0 \xrightarrow[\text{(Power)}]{\text{घात}} 4$

$3^4 \Rightarrow 81$
↳ इकाई का अंक (Unit digit)

जब संख्या N! के रूप में हो
(When the number is in the form of N!)

☞ **जब घात n! के रूप में हो**
(When the power is in the form of n!)-

$1! = 1$
$2! = 2 \times 1$
$3! = 3 \times 2 \times 1$
$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1$
$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$
$5! = 5 \times 4!$
$n! = n(n-1)!$

$\frac{n!}{4} \xrightarrow[\text{(Remainder)}]{\text{शेषफल}} 0 \xrightarrow[\text{(Power)}]{\text{घात}} 4$

जहाँ/Where, $\boxed{n! \geq 4}$

Ex. $992^{786!}$

$\because 786! > 4! \xrightarrow[\text{(Remainder)}]{\text{शेषफल}} 0 \xrightarrow[\text{(Power)}]{\text{घात}} 4$

$\therefore 2^4 = 16$

↳ इकाई का अंक (Unit digit)

☞ **जब संख्या n! के गुणनफल के रूप में हो (When the number is in the form of multiplication of n!)–**

संख्या/ number	0!	1!	2!	3!	4!
इकाई का अंक/Unit digit	1	1	2	6	4

- 5! और 5! से अधिक इकाई का अंक 0 देता है। (5! and greater than 5! give unit digit 0).

5 के गुणन का इकाई का अंक
(Unit digit of multiplication by 5)

☞ $5 \times$ विषम संख्या (Odd number) $\xrightarrow[\text{(Unit digit)}]{\text{इकाई का अंक}} 5$

Ex. $5 \times 1 = 5 \xrightarrow[\text{(Unit digit)}]{\text{इकाई का अंक}} 5$

Ex. $5 \times 3 = 15 \xrightarrow[\text{(Unit digit)}]{\text{इकाई का अंक}} 5$

☞ $5 \times$ सम संख्या (Even number) $\xrightarrow[\text{(Unit digit)}]{\text{इकाई का अंक}} 0$

Ex. $5 \times 2 = 10 \xrightarrow[\text{(Unit digit)}]{\text{इकाई का अंक}} 0$

Ex. $5 \times 4 = 20 \xrightarrow[\text{(Unit digit)}]{\text{इकाई का अंक}} 0$

☞ $5 \times \frac{\text{विषम संख्या}}{\text{(Odd number)}} \times \frac{\text{सम संख्या}}{\text{(Even number)}} \xrightarrow[\text{(Unit digit)}]{\text{इकाई का अंक}} 0$

Ex. $5 \times 1 \times 2 = 10 \xrightarrow[\text{(Unit digit)}]{\text{इकाई का अंक}} 0$

Ex. $5 \times 3 \times 4 = 60 \xrightarrow[\text{(Unit digit)}]{\text{इकाई का अंक}} 0$

■ किसी पूर्ण वर्ग संख्या का इकाई का अंक 0, 1, 4, 5, 6 या 9 हो सकता है, लेकिन यदि किसी संख्या का इकाई का अंक 0, 1, 4, 5, 6 या 9 हैं, तो आवश्यक नहीं कि वह पूर्ण वर्ग संख्या होगी।
The unit digit of a perfect square number can be 0, 1, 4, 5, 6 or 9 but if the unit digit of a number is 0, 1, 4, 5, 6 or 9 then it is not necessary that it is a perfect square number.

शून्य स्थान (Zero Place)
शून्यों की पगदंडी (Number of trailing zeroes)

■ शून्य का निर्माण 5 एवं 2 के युग्म (Pair) से होता है अर्थात 5 तथा 2 का गुणनफल करने पर हमें शून्य की प्राप्ति होती है।
A zero is formed by a pair of 5 and 2, i.e. by multiplying 5 and 2, we get zero

■ किसी भी प्रश्न में 5 एवं 2 के जितने जोड़े होगे उतने ही शून्य का निर्माण होता है। इसलिए प्रश्नों को हल करने के लिए 5 एवं 2 की घातो को देखा जाता है और जिसका घात कम होता है उतने ही शून्य का निर्माण होता है।
In any question, as many pairs of five and two are formed, The same zero is formed. Therefore, to solve the question the powers of 5 and 2 are seen and whose power is less, the same zero is created.

☞ $5 \times 2 = 10$
$5^1 \times 2^1 \xrightarrow{\text{No. of pair}} 1 \xrightarrow{\text{No. of zero}} 1$

☞ $25 \times 4 = 100$
$5^2 \times 2^2 \xrightarrow{\text{No. of pair}} 2 \xrightarrow{\text{No. of zero}} 2$

☞ $125 \times 4 = 500$
$5^3 \times 2^2 \xrightarrow{\text{No. of pair}} 2 \xrightarrow{\text{No. of zero}} 2$
(Which power less)

☞ $25 \times 8 = 200$
$5^2 \times 2^3 \xrightarrow{\text{No. of pair}} 2 \xrightarrow{\text{No. of zero}} 2$
(Which power less)

☞ $125 \times 8 = 1000$
$5^3 \times 2^3 \xrightarrow{\text{No. of pair}} 3 \xrightarrow{\text{No. of zero}} 3$

Ex. $25 \times 16 \times 2 \times 5$ को गुणा करने पर दाहिने ओर कितने शून्य होगे?
Multiplying $25 \times 16 \times 2 \times 5$ will be how many zeros on the right side.

Sol. $25 \times 16 \times 2 \times 5$
$\Rightarrow 5 \times 5 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5$
$\Rightarrow 5^3 \times 2^4$
$5^3 \times 2^4 \xrightarrow{\text{No. of pair}} 3 \xrightarrow{\text{No. of zero}} 3$
(Which power less)

Ex. $300 \times 400 \times 24 \times 25$ का गुणा करने पर दाहिने ओर कितने शून्य होगे?
Multiplying $300 \times 400 \times 24 \times 25$ will be how many zeros on right side.

Sol. $300 \times 400 \times 24 \times 25$

$\Rightarrow 3 \times 4 \times 24 \times 25 \times 10000$

$\Rightarrow 3 \times 4 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 \times 10000$

$\Rightarrow 2^5 \times 5^2 \times 3^2 \times 10000$

$$\underbrace{2^5 \times 5^2}_{(00)} \times 3^2 \times \underbrace{10000}_{(0000)}$$

शून्यों की संख्या (Number of zeroes) = 6

Ex. 1 से लेकर 60 तक सभी प्राकृतिक संख्याओं का गुणा करने पर दाहिने ओर कितने शून्य आऐगे? [Multiplying all natural numbers from 1 to 60, how many zeros will come to the right side.]

Sol. $1 \times 2 \times 3 \times .... \times 25 \times .... \times 50 \times ...... \times 60$

$\frac{60}{5} = 12$

$\frac{12}{5} = 2 \qquad 12 + 2 = 14$ (शून्य/Zeroes)

☞ दिए गये प्रश्न में यह स्पष्ट है कि गुणनफल करने पर 5 की घात की संख्या 2 की अपेक्षा कम प्राप्त होती है।

In the given question it is clear taht on multiplying, the power of 5 is less than that of 2.

☞ जब भागफल 5से कम हो तब भाग देना बन्द कर देते हैं।

Stop dividing when the quotient is less than 5.

Ex. 1 से लेकर 100 तक की सभी संख्याओं का गुणा करने पर कितने शून्य आऐगे? Multiplying all natural number from 1 to 100, How many zeros will come to right side.

Sol. $1 \times 2 \times 3 \times ..... \times 25 \times ..... \times 50 \times ...... \times 75 \times ...... \times 100$

$\Rightarrow \frac{100}{5} = 20$

$\frac{100}{25} = 4 \qquad 20 + 4 = 24$ (शून्य/Zeroes)

Ex. 1 से लेकर 500 तक सभी प्राकृतिक संख्याओं का गुणा करने पर दाहिने ओर कितने शून्य आऐगे।

Multiplying all natural numbers from 1 to 500, how many zeros will come to right side.

Sol. $1 \times 2 \times 3 \times ..... \times 25 \times ..... \times 50 \times ...... \times 100 \times ...... \times 500$

$\frac{500}{5} = 100$

$\frac{100}{5} = 20$

$\frac{20}{5} = 4 \qquad 100 + 20 + 4 = 124$ (शून्य/Zeroes)

Ex. 1 से लेकर 1000 तक की सभी संख्याओं का गुणा करने पर दाहिने ओर कितने शून्य आऐगे।

Multiplying all natural numbers 1 to 1000, How many zeros will come to right side.

Ex. $1 \times 2 \times 3 \times ..... \times 25 \times ..... \times 50 \times ...... \times 100 \times ...... \times 1000$

$\frac{1000}{5} = 200$

$\frac{200}{5} = 40$

$\frac{40}{5} = 8$

$\frac{8}{5} = 1 \qquad 200 + 40 + 8 + 1 = 249$ (शून्य/Zeroes)

Ex. 80 तक की सभी सम संख्याओं का गुणा करने पर दाहिनी ओर कितने शून्य आऐगे?

Multiplying all even numbers upto 80, How many zeros will come to right side.

Sol. $2 \times 4 \times 6 \times .... \times 80$

$\frac{80}{10} = 8$

$\frac{8}{5} = 1 \qquad 8 + 1 = 9$ (शून्य/Zeroes)

☞ सम संख्याओं के गुणनफल में, पहली बार भाग 10 से करते हैं, इसके बाद 5 से।

In multiplication of even number, first divide by 10, then by 5

Ex. 51 से लेकर 100 तक की सभी संख्याओं का गुणा करने पर कितने शून्य आऐगे?

Multiplying all the numbers 51 to 100, How many zeros will come to right side.

Sol. $51 \times 52 \times 53$ 100

$\Rightarrow [1 \times 2 \times 3 .... 100] - [1 \times 2 \times 3 .... 50]$

$\Rightarrow \frac{100}{5} = 20 \qquad \frac{50}{5} = 10$

$\frac{20}{5} = 4 \qquad \frac{10}{5} = 2$

$\Rightarrow [20 + 4 = 24] \qquad [10 + 2 = 12]$

$\Rightarrow [24] - [12] = 12$ (शून्य/Zeroes)

Ex. 96! को हल करने पर दाहिने ओर कितने शून्य आयेगे।

On solving 96! how many zeros will come to right side.

Sol. $96! = 96 \times 95 \times 94 \times .... \times 1$

$\frac{96}{5} = 19$

$\frac{19}{5} = 3 \qquad 19 + 3 = 22$ (शून्य /Zeroes)

Ex. 9860! को हल करने पर दाहिने ओर कितने शून्य आयेगे।

On solving 9860!, How many zeros will come to right side.

Sol. $9860! = 9860 \times 9859 .... \times 1$

$\therefore \frac{9860}{5} = 1972$

$\frac{1972}{5} = 394$

$\frac{394}{5} = 78$

$\frac{78}{5} = 15$

$\frac{15}{5} = 3$

$\Rightarrow 1972 + 394 + 78 + 15 + 3 = 2462$ (शून्य/Zeroes)

Ex. 1 से लेकर 100 तक विषम संख्याओं का गुणा करने पर कितने शून्य आऐगे?

Multiplying all the odd numbers 1 to 100, how many zeros will come to right side.

Sol. $1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9 \times 11$ 99

"शून्यों की संख्या शून्य होगी (Number of zeroes is zero)"

☞ दिये गये प्रश्न में सभी संख्याऐ विषम है। कोई भी संख्या 2 से विभाजित नही होगी इसलिये इन संख्याओं के गुणनफल में 2 का कोई भी अंक नही आयेगा। अतः दिए गये प्रश्न के गुणनफल के अन्त में एक भी शून्य प्राप्त नही होगा?

In the given question all the numbers are odd, no number will be divisible by 2. Hence no digit of two will appear in the product of these numbers. Hence not a single zero will be obtained at the end of the product of the given question.

Ex. प्रथम 100 अभाज्य संख्याओं का गुणा करने पर दाहिने ओर कितने शून्य आऐगे?

Multiplying the first 100 prime numbers, How many zeros will come to right side.

Sol. $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19 \times$ .... $\times$ 97

$\Rightarrow 2 \times 5$

$\Rightarrow 2^1 \times 5^1$

= शून्य की संख्या (Number of zero) = 1

Ex. $(1 \times 3 \times 5 \times 7 \times$ .... $\times 99) \times 8$ के गुणनखण्ड के अंत में दाहिने ओर कुल कितने शून्य आयेंगे।

How many zeroes on the right end of the product of $(1 \times 3 \times 5 \times 7 \times$ .... $\times 99) \times 8$.

Sol. $(1 \times 3 \times 5 \times 7 \times$ .... $\times 99) \times 8$

$(5 \times 15 \times 25 \times 35 \times$ .... $\times 95) \times 8$

{5 और 2 के जोड़े के लिए/For pair of 5 and 2}

$\Rightarrow 5^{12} \times 2^3$

$5^{12} \times 2^3 \xrightarrow[\text{(Which power less)}]{\text{No. of pair}} 3 \xrightarrow{\text{No. of zero}} 3$

Ex. शून्यकों की संख्या ज्ञात करो।

Find the number of zeroes.

$(3^{123} - 3^{122} - 3^{121})\ (2^{121} - 2^{120} - 2^{119})$

Sol. $(3^{123} - 3^{122} - 3^{121})\ (2^{121} - 2^{120} - 2^{119})$

$3^{121}\ (3^2 - 3^1 - 3^0)\ 2^{119}\ (2^2 - 2^1 - 2^0)$

$3^{121}\ (9 - 3 - 1)$ 2119 $(4 - 2 - 1)$

$3^{121}\ (5)\ 2^{119}\ (1)$

$2^{119} \times 3^{121} \times 5^1$

$\underbrace{2^{119} \times 5^1}_{\downarrow} \times 3^{121}$

No. of pair 1 $\rightarrow$ no. of zero = 1

Ex. यदि 100! को 3^n से पूर्णतः विभाजित किया जाए तो n का अधिकतम मान होगा–

If 100! divisible by 3^n then find the maximum value of n :

Sol. $100! = 100 \times 99 \times 98 \times$ .... $\times 1$

$\frac{100}{3} = 33$

$\frac{33}{3} = 11$

$\frac{11}{3} = 3$

$\frac{3}{3} = 1$

$\Rightarrow\ 33 + 11 + 3 + 1 = 48$

अतः/Hence n = 48

Ex. यदि 122!, 6^n से पूर्णतः विभाज्य हो तो n का अधिकतम मान होगा–

If 122! is divisible by 6^n then find the maximum value of n :

Sol. $\frac{122!}{6} = \frac{122!}{2 \times 3}$

2 और 3 का जोड़ा बनाने के लिए, 3 की घात कम होगी (To make a pair of 2 and 3, the power of 3 will be reduced.)

$\frac{122}{3} = 40$

$\frac{40}{3} = 13$

$\frac{13}{3} = 4$

$\frac{4}{3} = 1$

$\Rightarrow\ 40 + 13 + 4 + 1 = 58$

अतः/Hence n = 58

Ex. 123!, 12^n से पूर्णतः विभाज्य हो तो n का अधिकतम मान होगा–

If 123! is divisible by 12^n then find the maximum value of n :

Sol. $\frac{123!}{12^n} = \frac{123}{3 \times 2^2}$

$\frac{123!}{3^{59} \times 2^{117}}$

$\frac{123!}{3^{59} \times \left(2^2\right)^{58} \times 2^1}$

$\frac{123!}{3^{59} \times (4)^{58} \times 2^1}$

अतः/Hence n = 58

$\frac{123}{3} = 41$

$\frac{41}{3} = 13$

$\frac{13}{3} = 4$

$\frac{4}{3} = 1$

Sum = 59

$\frac{123}{2} = 61$

$\frac{61}{2} = 30$

$\frac{30}{2} = 15$

$\frac{15}{2} = 7$

$\frac{7}{2} = 3$

$\frac{3}{2} = 1$

Sum = 117

गुणनखण्डों की संख्या (Number of factors)

गुणनखण्ड (Factors)

गुणनखण्ड धनात्मक पूर्णांक होते हैं, जो किसी संख्या को पूर्णतः विभाजित कर सकते हैं।

Factors are positive integers that can divide a number exactly.

Ex. 12 के गुणनखण्ड (Factors of 12)

1, 2, 3, 4, 6, 12

☞ 12 के गुणज (Multiple of 12)

12, 24, 36, 48, ...

गुणनखण्डों को ज्ञात करना (How to find factors)

■ किसी भी संख्या को उसके अभाज्य गुणनखण्डों के रूप में लिखना।

Writing any numbers as its prime factors.

Ex. $12 = 2^2 \times 3^1$

$72 = 2^3 \times 3^2$

$90 = 2^1 \times 3^2 \times 5^1$

$\boxed{m = x^a . y^b . z^c}$

जहाँ/Where,

$m \Rightarrow$ संयुक्त संख्या (Composite number)

$a, b, c \Rightarrow$ प्राकृतिक संख्या (Natural number)

$x, y, z \Rightarrow$ अभाज्य संख्या (Prime number)

x → सम (Even); y, z → विषम (Odd)

■ कुल गुणनखण्डों की संख्या (The number of total factors)–: **$(a + 1) (b + 1) (c + 1)$**

■ विषम गुणनखण्डों की संख्या (The number of odd factors)–: **$(b + 1) (c + 1)$**

■ सम गुणनखण्डों की संख्या (The number of even factors)–: **$a (b + 1) (c + 1)$**

■ सभी गुणनखण्डों का योग (The sum of all factors)–: **$(x^0 + x^1 + x^2 ...... x^a) \times (y^0 + y^1 + y^2 ...... y^b) \times (z^0 + z^1 + z^2 ...... z^c)$**

■ विषम गुणनखण्डों का योग (The sum of odd factors)–: **$(y^0 + y^1 + ... y^b) \times (z^0 + z^1 + z^2 ...... z^c)$**

■ सम गुणनखण्डों का योग (The sum of even factors)–: **$(x^1 + x^2 + x^3 ...... x^a) \times (y^0 + y^1 .... y^b) \times (z^0 + z^1 + z^2 ...... z^c)$**

■ सभी गुणनखण्डों का गुणा (The product of factors) –: **$(x.y.z)^{\text{Total no. of factors/2}}$**

■ संख्या n के गुणनखण्डों के व्युत्क्रमों का योग (Sum of reciprocal of factors of n) =

$$\frac{\text{गुणनखण्डों का योग (sum of factors)}}{n}$$

■ $\text{औसत (Average)} = \dfrac{\text{गुणनखण्डों का योग (Sum of factors)}}{\text{गुणनखण्डों की संख्या (No. of factors)}}$

12 के विभिन्न गुणनखण्डों के लिए (For the factors of 12)

$\boxed{12 = 2^2 \times 3^1}$

■ **कुल गुणनखण्डों की संख्या (The number of total factors)–**

$12 = 2^2 \times 3^1$

$(2 + 1) \times (1 + 1)$

$3 \times 2 = \mathbf{6}$

■ **विषम गुणनखण्डों की संख्या (The number of odd factors)–**

$12 = 2^2 \times 3^1$

$(1 + 1) = \mathbf{2}$

■ **सम गुणनखण्डों की संख्या (The number of even factors)–**

$12 = 2^2 \times 3^1$

$2 \times (2^1 \times 3^1)$

सम (Even) $(1 + 1) \times (1 + 1)$

$(2) \times (2) = \mathbf{4}$

■ **सभी गुणनखण्डों का योग (The sum of factors)–**

$12 = 2^2 \times 3^1$

$= (2^0 + 2^1 + 2^2)(3^0 + 3^1)$

$= (1 + 2 + 4)(1 + 3)$

$= 7 \times 4 \Rightarrow \mathbf{28}$

■ **विषम गुणनखण्डों का योग (The sum of odd factors)–**

$12 = 2^2 \times 3^1$

$\Rightarrow (3^0 + 3^1)$

$1 + 3 \Rightarrow \mathbf{4}$

☞ विषम गुणनखण्डों के योग के लिए, सम गुणनखण्डों को छोड़ देते हैं। (For the sum of odd factors, leave out even factors).

■ **सम गुणनखण्डों का योग (The sum of even factors)–**

$12 = 2^2 \times 3^1$

$\Rightarrow (2^1 + 2^2)(3^0 + 3^1)$

$\Rightarrow (2 + 4)(1 + 3)$

$\Rightarrow 6 \times 4$

$\Rightarrow \mathbf{24}$

☞ सम गुणनखण्डों के योग के लिए, 2^0 से प्रारम्भ नहीं करते हैं। (For sum of even factors, don't start from 2^0).

■ **सभी गुणनखण्डों का गुणा (The product of all factors)–**

$12 = 2^2 \times 3^1$

Product of all factors of N = $N^{\text{Total no. of factors/2}}$

$= 12^{\frac{6}{2}}$

$= \mathbf{12^3}$

$12 = 2^2 \times 3^1$

$(2 + 1) \times (1 + 1)$

$3 \times 2 = \mathbf{6}$

■ **864 के ऐसे कितने गुणनखण्ड हैं, जो 6 के गुणन हो।**

How many factors of 864 which are multiple of 6?

Sol. $864 = 2^5 \times 3^3$

$864 = 2 \times 3\ [2^4 \times 3^2]$ {6 के गुणज के लिए}

$= 6\ [2^4 \times 3^2]$

$(4+1)\ (2+1)$

$\Rightarrow 5 \times 3$

$\Rightarrow 15$

■ **$2^7 \times 3^8 \times 5^9 \times 7^{10}$ के ऐसे कितने गुणनखण्ड है, जो पूर्ण वर्ग हैं।**

How many factors of $2^7 \times 3^8 \times 5^9 \times 7^{10}$ which are completely square?

Sol. $2^7 \times 3^8 \times 5^9 \times 7^{10}$

$\Rightarrow [(2^2)^3\, 2 \times (3^2)^4 \times (5^2)^4\, 5 \times (7^2)^5]$

{पूर्ण वर्ग के लिए}

$= 2 \times 5\ [(2^2)^3 \times (3^2)^4 \times (5^2)^4 \times (7^2)^5]$

$\Rightarrow (3+1)\times(4+1)\times(4+1)\times(5+1)$

गुणनखण्डों की संख्या $= 4 \times 5 \times 5 \times 6 \Rightarrow 600$

■ **$2^6 \times 3^8 \times 5^{10} \times 7^{12}$ के ऐसे कितने गुणनखण्ड हैं जो पूर्ण घन हैं।**

How many factors of $2^6 \times 3^8 \times 5^{10} \times 7^{12}$ which are completely cube?

Sol. $2^6 \times 3^8 \times 5^{10} \times 7^{12}$

$\Rightarrow (2^3)^2 \times (3^3)^2 \times (5^3)^3 \times 5 \times (7^3)^4$

$\Rightarrow 3^2 \times 5[(2^3)^2 \times (3^3)^2 \times (5^3)^3 \times (7^3)^4]$

$\Rightarrow (2+1)\times(2+1)\times(3+1)\times(4+1)$

$\Rightarrow 3 \times 3 \times 4 \times 5$

$\Rightarrow 180$

■ **$2^6 \times 3^{15} \times 5^{35} \times 7^{42}$ के ऐसे कितने गुणनखण्ड हैं जो पूर्ण वर्ग के साथ-साथ पूर्ण घन भी हैं।**

How many factors of $2^6 \times 3^{15} \times 5^{35} \times 7^{42}$ which are completely square as well as completely cube?

Sol. $2^6 \times 3^{15} \times 5^{35} \times 7^{42}$

वर्ग के लिए घात (Power for square) = 2

घन के लिए घात (Power for cube) = 3

ल.स.प. (LCM) = 6

$\Rightarrow [(2^6)^1 \times (3^6)^2 \times 3^3 \times (5^6)^5 \times 5^5 \times (7^6)^7]$

$\Rightarrow 3^3 \times 5^5[(2^6)^1 \times (3^6)^2 \times (5^6)^5 \times (7^6)^7]$

$\Rightarrow (1+1)\times(2+1)\times(5+1)\times(7+1)$

$\Rightarrow [2 \times 3 \times 6 \times 8]$

$\Rightarrow [6 \times 6 \times 8]$

$\Rightarrow [36 \times 8]$

$\Rightarrow 288$

■ **$2^5 \times 3^6 \times 5^4$ के सभी गुणनखण्डों का योग ज्ञात कीजिए, जो पूर्ण वर्ग हो।**

Find the sum of all factors of $2^5 \times 3^6 \times 5^4$ that are completely square.

Sol. $2^5 \times 3^6 \times 5^4$

$\Rightarrow [2^0 + 2^2 + 2^4]\ [3^0 + 3^2 + 3^4 + 3^6]\ [5^0 + 5^2 + 5^4]$

$\Rightarrow [1 + 4 + 16]\ [1 + 9 + 81 + 729]\ [1 + 25 + 625]$

$\Rightarrow [21] \times [820] \times [651]$

$\Rightarrow 11210220$

■ **$2^5 \times 3^6 \times 5^4$ के सभी गुणनखण्डों का योग ज्ञात कीजिए जो पूर्ण घन हो।**

Find the sum of all factors of $2^5 \times 3^6 \times 5^4$ that are compeletly cube.

Sol. $2^5 \times 3^6 \times 5^4$

$\Rightarrow [2^0 + 2^3]\ [3^0 + 3^3 + 3^6]\ [5^0 + 5^3]$

$\Rightarrow [1 + 8]\ [1 + 27 + 729]\ [1+125]$

$\Rightarrow [9]\ [757]\ [126]$

$\Rightarrow 858438$

■ **90 के सभी गुणनखण्डों के व्युत्क्रम का योग ज्ञात कीजिए।**

Find the sum of reciprocal of factors of 90.

Sol. संख्या n के गुणनखण्डों के व्युत्क्रमों का योग (Sum of reciprocal of factors of n) =

$$\frac{\text{गुणनखण्डों का योग (sum of factors)}}{n}$$

$90 = 21 \times 32 \times 51$

$$\Rightarrow \frac{(2^0 + 2^1)(3^0 + 3^1 + 3^2)(5^0 + 5^1)}{90}$$

$$\Rightarrow \frac{[(1+2)(1+3+9)(1+5)]}{90}$$

$$\Rightarrow \frac{[3 \times 13 \times 6]}{90}$$

$$\Rightarrow \frac{[39 \times 6]}{90}$$

$$\Rightarrow \frac{234}{90}$$

$\Rightarrow 2.6$

■ **144 के सभी गुणनखण्डों का औसत ज्ञात करो।**

Find the average of all the factors of 144.

Sol. $$\text{औसत (Average)} = \frac{\text{गुणनखण्डों का योग (Sum of factors)}}{\text{गुणनखण्डों की संख्या (No. of factors)}}$$

गुणनखण्डों के योग के लिए (For sum of factors)–

$144 = 2^4 \times 3^2$

$\Rightarrow [(2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4)\ (3^0 + 3^1 + 3^2)]$

$\Rightarrow [(1 + 2 + 4 + 8 + 16)\ (1 + 3 + 9)]$

$\Rightarrow [(31)\ (13)]$

$\Rightarrow 403$

गुणनखण्डों की संख्या के लिए (For no. of factors)–

$\Rightarrow (4 + 1)\ (2 + 1)$

$\Rightarrow 5 \times 3$

$\Rightarrow 15$

$$\text{औसत (Average)} = \frac{403}{15}$$

$\Rightarrow 26.86$

- किसी भी पूर्ण वर्ग संख्या के गुणनखण्डों की संख्या विषम होगी।
  (Only a perfect square number has odd number of factors)

  अथवा (or)

  यदि कोई संख्या के गुणनखण्डों की संख्या विषम है, तो वह संख्या पूर्ण वर्ग होगी। (If a number has odd number of factors that means number is a perfect square).
- अभाज्य संख्या के वर्ग के मात्र 3 गुणनखण्ड होते हैं।
  Square of a prime number has only 3 factors.

■ **2 अंकों की कितनी संख्याएं हैं जिनके केवल 3 गुणनखण्ड हैं?**

The total number of 2 digit no's which have only 3 factors?

Sol. ∵ अभाज्य संख्या के वर्ग के मात्र 3 गुणनखण्ड होते हैं। (Square of a prime number has only 3 factor)

$(5^2) = 25 \xrightarrow{\text{Factors}} 1, 5, 25$

$(7^2) = 49 \xrightarrow{\text{Factors}} 1, 7, 49$

$5, 7 \to$ अभाज्य संख्या (Prime number)

अतः 2 अंकों की 2 संख्याओं (25, 49) के 3 गुणनखण्ड होंगे। (Hence, 2, two digit no. will have 3 factors)

■ **3 अंकों की कितनी संख्याएं है, जिनके केवल 3 गुणनखण्ड हैं?**

The total number of 3 digit no's which have only 3 factors?

Sol.

$(11)^2 = 121 \xrightarrow{\text{Factors}} 1, 11, 121$

$(13)^2 = 169 \xrightarrow{\text{Factors}} 1, 13, 169$

$(17)^2 = 289 \xrightarrow{\text{Factors}} 1, 17, 289$

$(19)^2 = 361 \xrightarrow{\text{Factors}} 1, 19, 361$

$(23)^2 = 529 \xrightarrow{\text{Factors}} 1, 23, 529$

$(29)^2 = 841 \xrightarrow{\text{Factors}} 1, 29, 841$

$(31)^2 = 961 \xrightarrow{\text{Factors}} 1, 31, 961$

अतः 3 अंकों की 7 संख्याओं के 3 गुणनखण्ड होंगे। (Hence, 7, three digit no. will have 3 factors).

अभाज्य गुणनखण्ड ज्ञात करना
(How to find prime factor)

$$\boxed{m = x^a . y^b . z^c}$$

जहाँ/Where,

$m \Rightarrow$ संयुक्त संख्या (Composite number)

$x, y, z \Rightarrow$ अभाज्य संख्या (Prime number)

$a, b, c \Rightarrow$ प्राकृतिक संख्या (Natural number)

अभाज्य गुणनखण्डों की संख्या (Number of prime factors) = $a + b + c$

अभाज्य गुणनखण्डों का योग (Sum of prime factors) = $ax + by + cz$

■ **144 के सभी अभाज्य गुणनखण्डों की संख्या ज्ञात कीजिए।**

Find the total number of prime factors of 144.

Sol. $144 = 2^4 \times 3^2$

अभाज्य गुणनखण्डों की संख्या (No. of prime factors)

$= 4 + 2 \Rightarrow 6$

■ **$2^5 \times 3^6 \times 7^{12}$ के सभी अभाज्य गुणनखण्डों की संख्या ज्ञात कीजिए।**

Find the total number of prime factor of $2^5 \times 3^6 \times 7^{12}$.

Sol. $2^5 \times 3^6 \times 7^{12}$

अभाज्य गुणनखण्डों की संख्या (No. of prime factors)

$= 5 + 6 + 12$

$\Rightarrow 23$

■ **$6^6 \times 10^{10} \times 35^3$ के सभी अभाज्य गुणनखण्डों की संख्या ज्ञात कीजिए।**

Find the total number of prime factor of $6^6 \times 10^{10} \times 35^3$.

Sol. $6^6 \times 10^{10} \times 35^3$

$\Rightarrow (2 \times 3)^6 \times (2 \times 5)^{10} \times (5 \times 7)^3$

$\Rightarrow 2^6 \times 3^6 \times 2^{10} \times 5^{10} \times 5^3 \times 7^3$

अभाज्य गुणनखण्डों की संख्या (No. of prime factors)

$= (6 + 6 + 10 + 10 + 3 + 3)$

$\Rightarrow (12 + 20 + 6)$

$\Rightarrow (18 + 20)$

$\Rightarrow 38$

■ **$2^3 \times 3^4 \times 5^6$ के सभी अभाज्य गुणनखण्डों का योग ज्ञात कीजिए।**

Find sum of all the prime factors of $2^3 \times 3^4 \times 5^6$.

Sol. $2^3 \times 3^4 \times 5^6$

$\Rightarrow (2 + 2 + ...$ 3 times$) + (3 + 3 + ...$ 4 times$)$
$+ (5 + 5 + ...$ 6 times$)$

$\Rightarrow (2 \times 3) + (3 \times 4) + (5 \times 6)$

$\Rightarrow 6 + 12 + 30$

$\Rightarrow 48$

शेषफल प्रमेय (Remainder Theorem)

भाजक (divisor) d) भाज्य (Dividend) D (भागफल (quotient) q

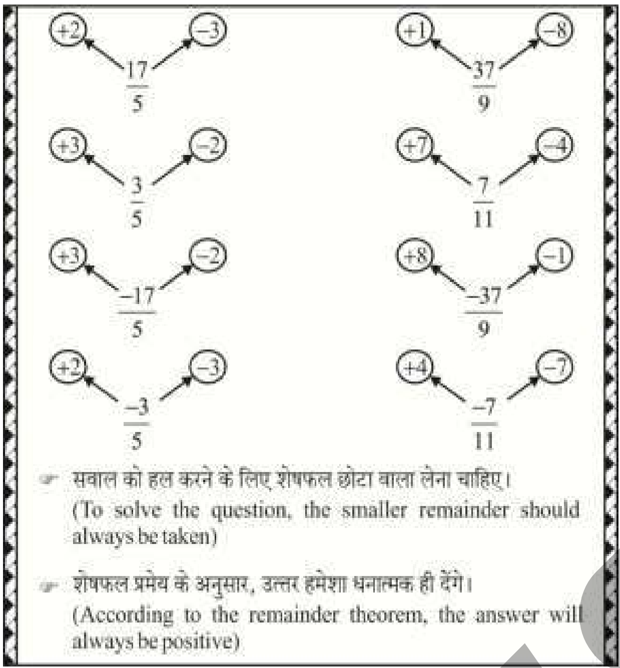
शेषफल (remainder) r

$$\boxed{D = dq + r}$$

जहाँ/Where,

$\{d > r \geq 0\}$

आधारीय शेषफल प्रमेय
(Basic remainder theorem)

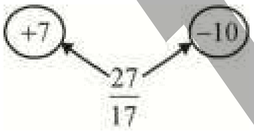


■ **शेषफल ज्ञात करो।/Find the remainder :**

$$\mathbf{\frac{70\times100\times65\times1735\times87}{17}}$$

Sol. $\dfrac{\overset{(+2)}{70}\times\overset{(-2)}{100}\times\overset{(-3)}{65}\times\overset{(+1)}{1735}\times\overset{(+2)}{87}}{17}$

$$\frac{(+2)\times(-2)\times(-3)\times(+1)\times(+2)}{17} \quad \frac{24}{17}$$



अतः/ Hence,

शेषफल (Remainder) = **+7**

1! = 1
2! = 2 × 1
3! = 3 × 2 × 1
4! = 4 × 3 × 2 × 1
5! = 5 × 4 × 3 × 2 × 1
5! = 5 × 4!
n! = n(n − 1)!

■ $\mathbf{\dfrac{1!+2!+3!+4!+5!+6!........1000!}{10}}$

Sol. $\dfrac{1!+2!+3!+4!+5!+6!........1000!}{10}$

$$=\frac{1+(2\times1)+(3\times2\times1)+(4\times3\times2\times1)+(5\times4\times3\times2\times1)........1000!}{10}$$

$$\frac{\overset{+1}{1}+\overset{+2}{2}+\overset{-4}{6}+\overset{+4}{24}+\overset{0}{120}+........\overset{0}{1000!}}{10}$$

$$\Rightarrow\frac{1+2-4+4}{10} = \frac{3}{10}$$

शेषफल (Remainder) = **3**

■ **शेषफल ज्ञात करो।/Find the remainder :**

$$\mathbf{\frac{1!+2!+3!+4!+5!..........1000!}{12}}$$

$$\Rightarrow\frac{\overset{1}{1}+\overset{+2}{2}+\overset{+6}{6}+\overset{0}{24}+\overset{0}{120}+...........\overset{0}{1000!}}{12}$$

$$\Rightarrow\frac{1+2+6+0+......0}{12}\Rightarrow\frac{9}{12}$$

शेषफल (Remainder) = **9**

■ **शेषफल ज्ञात करो।/Find the remainder :**

$$\mathbf{\frac{1!+2!+3!+4!+5!+6!.........1000!}{18}}$$

Sol. $\dfrac{1!+2!+3!+4!+5!+6!.........1000!}{18}$

$$\Rightarrow\frac{\overset{+1}{1}+\overset{+2}{2}+\overset{+6}{6}+\overset{+6}{24}+\overset{-6}{120}+\overset{0}{720}.\overset{+}{+}..........\overset{0}{1000!}}{18}$$

$$=\frac{1+2+6+6-6}{18}=\frac{9}{18}$$

शेषफल (Remainder) = **9**

☞ Factorial function में, यदि किसी संख्या से भाग दिया जाए तो एक बार शेषफल शून्य आने पर, आगे भी शेषफल शून्य आता रहेगा।/In factorial fuction, if divide by any number then remainder will come zero one's further zero will come to.

अंतिम (इकाई) अंक और अंतिम दो अंक निकालना
(To find last (unit) digit and last two digits)

■ किसी संख्या में 10 से भाग देने पर, जो शेषफल प्राप्त होगा, वह उस संख्या का अंतिम अंक (इकाई का अंक) होगा।
The remainder obtained by dividing a number by 10 will be the last (unit) digit of the number.

■ किसी संख्या में 100 से भाग देने पर, जो शेषफल प्राप्त होगा वह उस संख्या के अंतिम दो अंक होगा।
The remainder obtained by dividing a number by 100 will be the last two digits of that number.

■ **अंतिम (इकाई) अंक ज्ञात कीजिए/Find the last (unit) digit-**

1!+2!+3!+4!+5!+6!........1000!

Sol. अंतिम अंक के लिए (For last digit)−

$$\frac{1!+2!+3!+4!+5!+6!.........1000!}{10}$$

$= \frac{1+(2\times1)+(3\times2\times1)+(4\times3\times2\times1)+(5\times4\times3\times2\times1)........1000!}{10}$

$\frac{\overset{+1}{1} + \overset{+2}{2} + \overset{-4}{6} + \overset{+4}{24} + \overset{0}{120} + ...\overset{0}{1000!}}{10}$

$\Rightarrow \frac{1+2-4+4}{10} = \frac{3}{10}$

$\because$ शेषफल (Remainder) = **3**

$\therefore$ अंतिम अंक (Last digit) = **3**

■ **अंतिम दो अंक ज्ञात कीजिए/Find the last two digits-**
103 × 1298 × 13702 × 1197

Sol. अंतिम दो अंक के लिए (For last two digits)–

$\frac{103\times1298\times13702\times1197}{100}$

$\frac{\overset{+3}{103} + \overset{-2}{1298} + \overset{+2}{13702} + \overset{-3}{1197}}{100}$

$\frac{(+3)\times(-2)\times(+2)\times(-3)}{100} \quad \frac{36}{100}$

$\because$ शेषफल (Remainder) = **36**

$\therefore$ अंतिम अंक (Last digit) = **36**

सरलीकरण का प्रयोग (Use of simplification)

■ भिन्न की अभिव्यक्ति को सरल बनाने के लिए, अंश और हर के हिस्सों को जितना हो सके उतना छोटा करने का प्रयास करना चाहिए। फिर वास्तविक शेष प्राप्त करने के लिए, अंतिम शेष को जितने गुणक से छोटा किया गया उसका गुणा करेंगे।
For simplification of the expression of the fraction, to cancel out parts of the numerator and denominator as much as you can, then final remainder to be multiplied by the canceled number to get the actual remainder.

$\frac{35}{15} \xrightarrow{\text{Remainder}} +5, \quad -10$

By simplification,

If we write, $\frac{35}{15} \xrightarrow[\text{by } 5]{\text{Simplify}} \frac{7}{3} \xrightarrow{\text{Remainder}} +1, \quad -2$

Hence, $+1, \quad -2$

$\downarrow \qquad \downarrow$

$+1\times5 \quad -2\times5$

वास्तविक शेषफल (Actual remainder) $\longrightarrow +5 \quad -10$

■ **अंतिम दो अंक ज्ञात कीजिए/Find the last two digits-**
13978 × 398 × 53 × 76 × 27

Sol. अंतिम दो अंक के लिए (For last two digits)–

$\frac{13978\times398\times53\times76\times27}{100}$

Simplify by 4,

$\frac{13978\times398\times53\times\overset{19}{\cancel{76}}\times27}{\underset{25}{\cancel{100}}}$

$\frac{\overset{+3}{13978}\times\overset{-2}{398}\times\overset{+3}{53}\times\overset{-6}{19}\times\overset{+2}{27}}{25}$

$\frac{(+3)\times(-2)\times(+3)\times(-6)\times(+2)}{25}$

$\frac{216}{25}$ Remainder 16, 9

वास्तविक शेषफल (Actual remainder)

$= +16 \times 4, \quad -9\times4 \quad \{\because$ simplify by 4$\}$

$= +64, \quad -36$ (शेषफल हमेशा धनात्मक लेते हैं)
(Take remainder always positive)

अतः/Hence,
अंतिम दो अंक (Last two digits) = 64

चक्रीय या प्रतिरूप प्रमेय (Cyclicity or pattern theorem)

■ चक्रीय प्रमेय के अनुसार, शेषफल एक निश्चित अंतराल के बाद एक संख्या से विभाजित होने पर खुद को दोहराते हैं।
According to the cyclicity or pattern theorem, remainders repeat themselves after a certain interval when divided by a number.

☞ शेषफल 1 आने के बाद, चक्रीयता की पुनरावृत्ति होती है।
After the remainder is 1, there is a repetition of the cyclicity.

	शेषफल		शेषफल
$\frac{2^1}{7} = \frac{2}{7} \Rightarrow 2$	↓	$\frac{2^4}{7} = \frac{16}{7} \Rightarrow 2$	↓
$\frac{2^2}{7} = \frac{4}{7} \Rightarrow 4$	↓	$\frac{2^5}{7} = \frac{32}{7} \Rightarrow 4$	↓
$\frac{2^3}{7} = \frac{8}{7} \Rightarrow 1$	↓	$\frac{2^6}{7} = \frac{64}{7} \Rightarrow 1$	↓

चक्रीयता (Cyclicity) = 3

☞ शेषफल –1 से +1 बनाने के लिए चक्रीयता को दोगुना कर देते हैं।/To change the remainder from –1 to +1, the cyclicity is doubled.

		शेषफल
$\frac{3^1}{7} = \frac{3}{7} \Rightarrow 3,$	-4	↓
$\frac{3^2}{7} = \frac{9}{7} \Rightarrow 2,$	-5	↓
$\frac{3^3}{7} = \frac{27}{7} \Rightarrow 6,$	-1	↓

Remainder = –1 then power = 3
$\downarrow \qquad \downarrow \times 2$
Remainder = +1 then power = 6

चक्रीयता (Cyclicity) = 6

■ **शेषफल ज्ञात कीजिए।/Find the remainder.**

$$\frac{37^{100}}{7}$$

Sol. $\frac{37^{100}}{7}$

$\Rightarrow \frac{2^{100}}{7}$ $\quad \because$ cyclicity = 3 $\quad \frac{100}{3} \xrightarrow{\text{Remainder}} 1$

$\Rightarrow \frac{2^{1}}{7} = \frac{2}{7}$

शेषफल (Remainder) = 2

यूलर की शेषफल प्रमेय
(Euler's Remainder Theorem)

■ **यूलर का टोशेंट संख्या (Euler's Totient Number)–**

संख्या x के यूलर टोशेंट संख्या, x से छोटी व x के साथ सहभाज्य होगी। (Euler's totient number of x is of numbers which are less than x and co-prime to x).

Ex. 12 के टोशेंट (Totient of 12) = 1, 5, 7, 11

$\therefore$ टोशेंट संख्या (Totient number) = 4

$\Rightarrow 12\,(\phi) = 4$

■ **टोशेंट संख्या निकालना (Find the totient number)–**

☞ If $n = a \times b$

{a, b → अभाज्य गुणनखण्ड (prime factors)}

$$\therefore \boxed{n(\phi) = n\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)}$$

☞ If $n = a^2 \times b^3 \times c^5$

{a, b, c → अभाज्य गुणनखण्ड (prime factors)}

$$\therefore \boxed{n(\phi) = n\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)}$$

☞ If n is a prime number –:

$n \rightarrow n$

$$n(\phi) = n\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

$$n(\phi) = \frac{n(n-1)}{n}$$

$$\boxed{n(\phi) = (n-1)}$$

अतः अभाज्य संख्याओं की टोशेंट संख्या उससे एक कम होती है।

Hence, the totient number of prime number is less than 1 that number.

यूलर की शेषफल प्रमेय (Euler's Remainder Theorem)

$$\frac{x^{y(\phi)}}{y} \xrightarrow{\text{Remainder}} 1$$

जहाँ

(x, y) → सह अभाज्य संख्याएँ (co-prime numbers)

y (ϕ) → यूलर टोशेंट नम्बर (Euler totient number)

■ **शेषफल निकालिए/Find the remainder :**

$$\frac{13^{8}}{15}$$

Sol. $\frac{13^{8}}{15}$

($\because$ 13, 15 → सह अभाज्य/Co-prime)

For totient number,

$\because 15 = 3 \times 5$

$$15(\phi) = 15\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)$$

$$= 15 \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$$

$$15\,(\phi) = 8$$

$\Rightarrow \frac{13^{15(\phi)}}{15}$

Remainder = 1

फरमेट्स प्रमेय (Fermatas theorem)

$$\frac{a^{p-1}}{p} \xrightarrow{\text{Remainder}} 1$$

जहाँ/Where,

{P → अभाज्य संख्या (Prime number)
P, a → सह-अभाज्य संख्या (Co-prime number)}

■ **शेषफल ज्ञात कीजिए/Find the remainder :**

$$\frac{a^{p}}{p}$$

Sol. $\frac{a^{p}}{p}$

$\Rightarrow \frac{a^{p-1}.a^{1}}{p}$

$\Rightarrow \frac{1.a}{p} = \frac{a}{p} \xrightarrow{\text{Remainder}} a$

■ **शेषफल ज्ञात कीजिए/Find the remainder :**

$$\frac{a^{p}-a}{p}$$

Sol. $\frac{a^{p}-a}{p} \quad \frac{a.a^{p-1}-a}{p}$

$= \frac{a-a}{p} \quad \frac{0}{p} \quad$ Remainder $\quad 0$

■ **शेषफल ज्ञात कीजिए/Find the remainder :**

$$\frac{\mathbf{2^{72}}}{\mathbf{73}}$$

Sol. $\frac{2^{72}}{73}$

$\Rightarrow \quad \frac{2^{72-1}}{73} \Rightarrow \frac{a^{P-1}}{p}$ (फरमेट्स प्रमेय से)

शेषफल = 1

73 $\rightarrow$ अभाज्य संख्या (Prime number)

(2, 73) $\rightarrow$ सह अभाज्य संख्याएँ (Co-prime number)

■ **शेषफल ज्ञात कीजिए/Find the remainder :**

$$\frac{\mathbf{2^{100}}}{\mathbf{101}}$$

Sol. $\frac{2^{100}}{101}$

$\Rightarrow \frac{2^{101-1}}{101} = \frac{a^{P-1}}{P}$

= Remainder = +1

101 $\rightarrow$ अभाज्य संख्या (Prime number)

(2, 101) $\rightarrow$ सह अभाज्य संख्या (Co-prime number)

विलसन प्रमेय (Wilson theorem)

$$\frac{(P-1)!}{P} \xrightarrow{\text{Remainder}} (P-1)$$

जहाँ/Where,

$\{P \rightarrow$ अभाज्य संख्या (Prime number)$\}$

■ **शेषफल ज्ञात कीजिए/ Find the remainder :**

$$\frac{\mathbf{18!}}{\mathbf{19}}$$

Sol. $\frac{18!}{19}$

$\Rightarrow \frac{(19-1)!}{19} \xrightarrow{\text{Remainder}} (19-1) = 18$

■ **शेषफल ज्ञात कीजिए/ Find the remainder :**

$$\frac{\mathbf{17!}}{\mathbf{19}}$$

Sol. माना $\frac{17!}{19} \xrightarrow{\text{Remainder}} x$

$\because$ हम जानते है कि (We know that),

$\Rightarrow \frac{18!}{19} \xrightarrow{\text{Remainder}} 18$

$\Rightarrow \frac{18 \times 17!}{19} \xrightarrow{\text{Remainder}} 18$

$18 \quad x$

$\nwarrow_{\text{Remainder}} \nearrow$

$\Rightarrow \frac{18 \times 17!}{19} \xrightarrow{\text{Remainder}} 18$

$\therefore \; 18 \times x = 18$

$x = 1$

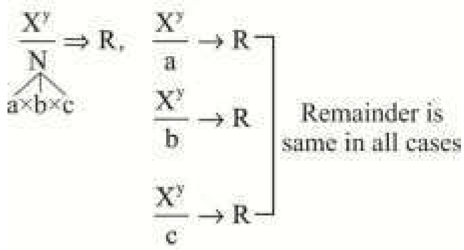
$\therefore \frac{17!}{18} \xrightarrow{\text{Remainder}} 1$

चाइनीज शेषफल प्रमेय (Chinese remainder theorem)

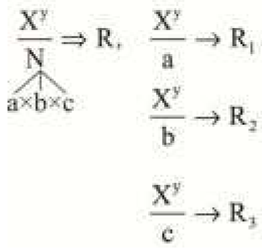
■ चाइनीज शेषफल प्रमेय के अनुसार, यदि कोई पूर्णांक n के यूक्लिडियन विभाजन के अवशेषें को कई पूर्णांकों से जानता है, तो इन पूर्णांकों के उत्पाद द्वारा n के विभाजन के शेष को विशिष्ट रूप से निर्धारित किया जा सकता है, इस शर्त के तहत कि विभाजक जोड़ीदार सह अभाज्य है।

According to Chinese remainder theorem, one knows the remainders of the euclidean division of an integer n by several integers, then one can determine uniquely the remainder of the division of n by the product of these integers, under the condition that the divisors are pariwise coprime.

☞



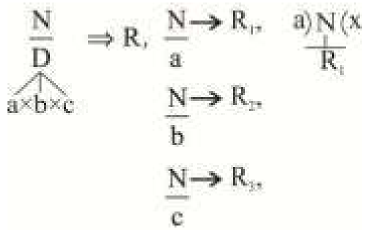
☞



Common remainder = R

$R = (a - R_1) = (b - R_2) = (c - R_3)$

☞



$R = ax + R_1 = by + R_2 = cz + R_3$

[Where as, $(a - R_1) \neq (b - R_2) \neq (c - R_3)$]

बहुपद शेषफल प्रमेय
(Polynomial Remainder Theorem)

- एक या एक से अधिक घात वाले बहुपद P(x) में, रैखिक बहुपद (x – a) से भाग देने पर शेषफल P(a) होता है।
  Dividing a polynomial P(x) of degree one or more by the linear polynomial (x – a) gives the remainder P(a).

Ex. $P(x) = x^3 + 2x^2 - x + 1$ को $(x - 2)$ से भाग देने पर शेषफल ज्ञात कीजिए

Sol. $\because$ भाजक (divisor) = $(x - 2)$

$\therefore (x - 2) = 0 \Rightarrow x = 2$

x का मान बहुपद में रखने पर,

$$\begin{aligned} P(x) &= x^3 + 2x^2 - x + 1 \\ &= (2)^3 + 2(2)^2 - 2 + 1 \\ &= 8 + 8 - 2 + 1 \end{aligned}$$

शेषफल (Remainder) = 15

- **गुणनखण्ड प्रमेय (Factor theorem)–** एक या एक से अधिक घात वाले बहुपद P(x) में रैखिक बहुपद (x – a) से भाग देने पर शेषफल P(a) का मान 0 होता है।

Ex. $P(x) = x^3 + 2x^2 - x + 1$ का $(x - 2)$ गुणनखण्ड है कि नही !

Sol. $\because$ भाजक (divisor) = $(x - 2)$

$\therefore (x - 2) = 0 \Rightarrow x = 2$

x का मान बहुपद में रखने पर,

$$\begin{aligned} P(x) &= x^3 + 2x^2 - x + 1 \\ &= (2)^3 + 2(2)^2 - 2 + 14 \\ &= 8 + 8 - 2 + 14 \\ &= 16 - 16 \\ &= 0 \end{aligned}$$

अतः $(x - 2)$, $x^3 + 2x^2 - x + 1$ का एक गुणनखण्ड है।

			निभाज्य (Divisible)
☞	$a^n + b^n$	$n \rightarrow$ विषम (odd)	$(a + b)$ ✓ $(a - b)$ ×
☞	$a^n + b^n$	$n \rightarrow$ सम (even)	$(a + b)$ × $(a - b)$ ×
☞	$a^n - b^n$	$n \rightarrow$ विषम (odd)	$(a + b)$ × $(a - b)$ ✓
☞	$a^n - b^n$	$n \rightarrow$ सम (even)	$(a + b)$ ✓ $(a - b)$ ✓

शेषफल

$\frac{4^1}{6} = \frac{4}{6} \Rightarrow 4$

$\frac{4^2}{6} = \frac{16}{6} \Rightarrow 4$

$\frac{4^3}{6} = \frac{64}{6} \Rightarrow 4$

$\frac{4^4}{6} = \frac{256}{6} \Rightarrow 4$

$\vdots \qquad \vdots$

$\boxed{\frac{4^n}{6} \xrightarrow{\text{Remainder}} 4}$

$\boxed{\frac{4^n}{6} \xrightarrow{\text{Remainder}} 4}$

{n → धनात्मक पूर्णांक (Positive integer)}

ल.स.प. और म.स.प. (L.C.M. and H.C.F.)

गुणज (अपवर्त्य) और गुणनखण्ड (अपवर्तक) में अंतर
(Difference between multiple and factor)

क्र. सं. S. N.	गुणज (Multiple)	गुणनखण्ड (Factor)
1.	गुणज को अन्य संख्याओं से गुणा करने पर प्राप्त संख्याओं के रूप में परिभाषित किया जाता है। The multiples are defined as the numbers obtained when multiplied by other numbers	गुणनखण्डों को दी गई संख्या के सटीक विभाजक के रूप में परिभाषित किया जाता है। Factors are defined as the exact divisors of the given number
2.	गुणकों की संख्या अनंत है। The number of multiples is infinte	गुणनखण्डों की संख्या सीमित है। The number of factors is finite
3.	गुणज ज्ञात करने के लिए उपयोग की जाने वाली क्रिया गुणन है। The operation used to find the multiples is a multiplication.	गुणनखण्डों को ज्ञात करने के लिए प्रयोग की जाने वाली क्रिया विभाजन है। The operation used to find the factors is a division
4.	गुणजों का परिणाम दी गई संख्या से अधिक या उसके बराबर होना चाहिए। The outcome of the multiples should be greater than or equal to the given number	गुणनखण्डों का परिणाम दी गई संख्या से कम या उसके बराबर होना चाहिए। The outcome of the factors should be less than or equal to the given number.