उत्तर प्रदेश लोक सेवा आयोग द्वारा आयोजित

एल. टी. ग्रेड

भर्ती परीक्षा

गणित

सॉल्व्ड पेपर

एवं

प्रैक्टिस बुक

व्याख्या सहित हल

प्रधान सम्पादक
ए. के. महाजन
सम्पादन एवं संकलन
एल.टी. परीक्षा विशेषज्ञ समिति
कम्प्यूटर ग्राफिक्स
बालकृष्ण, चरन सिंह

संपादकीय कार्यालय
12, चर्च लेन, प्रयागराज-211002

9415650134
Email : yctap12@gmail.com
website : www.yctbooks.com/www.yctfastbook.com/www.yctbooksprime.com
© All rights reserved with Publisher

प्रकाशन घोषणा

प्रधान सम्पादक एवं प्रकाशक आनन्द कुमार महाजन ने E:Book by APP Youth Prime BOOKS, से मुद्रित करवाकर, वाई.सी.टी. पब्लिकेशन्स प्रा. लि., 12, चर्च लेन, प्रयागराज-211002 के लिए प्रकाशित किया।

इस पुस्तक को प्रकाशित करने में सम्पादक एवं प्रकाशक द्वारा पूर्ण सावधानी बरती गई है
फिर भी किसी त्रुटि के लिए आपका सुझाव एवं सहयोग सादर अपेक्षित है।

किसी भी विवाद की स्थिति में न्यायिक क्षेत्र प्रयागराज होगा।

विषय-सूची

- उत्तर प्रदेश लोक सेवा आयोग एल.टी. ग्रेड-परीक्षा, 2018 गणित व्याख्या सहित हल 5-29
- उत्तर प्रदेश लोक सेवा आयोग (LT Grade) गणित प्रैक्टिस सेट-1 व्याख्या सहित हल 30-55
- उत्तर प्रदेश लोक सेवा आयोग (LT Grade) गणित प्रैक्टिस सेट-2 व्याख्या सहित हल 56-79
- उत्तर प्रदेश लोक सेवा आयोग (LT Grade) गणित प्रैक्टिस सेट-3 व्याख्या सहित हल 80-103
- उत्तर प्रदेश लोक सेवा आयोग (LT Grade) गणित प्रैक्टिस सेट-4 व्याख्या सहित हल 104-126
- उत्तर प्रदेश लोक सेवा आयोग (LT Grade) गणित प्रैक्टिस सेट-5 व्याख्या सहित हल 127-150
- उत्तर प्रदेश लोक सेवा आयोग (LT Grade) गणित प्रैक्टिस सेट-6 व्याख्या सहित हल 151-176
- उत्तर प्रदेश लोक सेवा आयोग (LT Grade) गणित प्रैक्टिस सेट-7 व्याख्या सहित हल 177-200
- उत्तर प्रदेश लोक सेवा आयोग (LT Grade) गणित प्रैक्टिस सेट-8 व्याख्या सहित हल 201-225
- उत्तर प्रदेश लोक सेवा आयोग (LT Grade) गणित प्रैक्टिस सेट-9 व्याख्या सहित हल 226-248
- उत्तर प्रदेश लोक सेवा आयोग (LT Grade) गणित प्रैक्टिस सेट-10 व्याख्या सहित हल 249-272

उत्तर प्रदेश लोक सेवा आयोग

एल.टी. ग्रेड–परीक्षा योजना एवं पाठ्यक्रम

परीक्षा हेतु 150 वस्तुनिष्ठ बहुविकल्पीय प्रश्नों वाला एक प्रश्नपत्र होगा। जिसका प्रत्येक प्रश्न 01 अंक का होगा। प्रत्येक गलत उत्तर के लिए 1/3 (0.33) अंक दण्ड के रूप में काटा जायेगा।

उक्त प्रश्नपत्र दो भागों में होगा।

प्रथम भाग– सामान्य अध्ययन – 30 प्रश्न (वस्तुनिष्ठ प्रकार)

द्वितीय भाग– मुख्य विषय – 120 प्रश्न (वस्तुनिष्ठ प्रकार)

कुल प्रश्नों की संख्या – 150

परीक्षा अवधि– 2 घंटे (120 मिनट).....पूर्णांक 150

विषय–गणित

1- Algebra

Theory of equations, A.P., G.P. and H.P., sum of squares and cubes of natural numbers, permutation and combination, binomial theorem, exponential and logarithmic series. Algebra of sets, relation and function, types of relations, equivalence relation, types of functions, composition of functions, inverse of a function, binary operations on a set, group, subgroup, normal subgroup, quotient group, cyclic group, order of an element in a group, permutation group, even and odd permutations, Lagrange's theorem and its consequences, group homomorphism. Determinants, types of matrices, algebraic operations on matrices, symmetric and skew symmetric matrices, Hermitian and skew Hermitian matrices, inverse of a matrix, rank of a matrix, application of matrix in solving system of linear equations, eigen values, eigen vectors of a matrix, Cayley-Hamilton's theorem and its applications.

बीजगणित

समीकरण सिद्धान्त, समान्तर गुणोत्तर एवं हरात्मक श्रेणियाँ, प्राकृतिक संख्याओं के वर्गों एवं घनों का योग, कमचय एवं संचय, द्विपद प्रमेय, चरघातांकीय एवं लघुगणकीय श्रेणियाँ।

समुच्चय का बीजगणित सम्बन्ध एवं फलन, संबंधों के प्रकार, तुल्यता संबंध, फलनों के प्रकार, फलनों का संयोजन, प्रतिलोम फलन, समुच्चय पर द्विआधारी संक्रियायें, समूह, उपसमूह, प्रसामान्य समूह, आंशिक समूह, चक्रीय समूह, समूह के अवयव की कोटि, क्रमचय समूह, सम एवं विषम क्रमचय, लाग्रांज प्रमेय और इसके परिणाम, समूह समाकारिता।

सारणिक समूह के प्रकार, आव्यूहों पर बीजगणितीय संक्रियायें, सममित एवं विषम सममित आव्यूह, हर्मिटीय एवं विषम हर्मिटीय आव्यूह, आव्यूह का प्रतिलोम, आव्यूह की जाति, आव्यूह का रेखीय समीकरणों के निकाय को हल करने में अनुप्रयोग, आव्यूह के आईगेनमान एवं आईगेन सदिश, कैले हैगिल्टन प्रमेय और इसके अनुप्रयोग।

2- Real Analysis

Sequence of real numbers, bounded and monotonic sequences, convergent sequences, convergence of series of positive terms, comparison test Cauchy's nth root test, ratio test, Raabe's test, logarithmic test, De Morgan and Bertrand test, alternating series and Leibnitz test.

वास्तविक विश्लेषण

वास्तविक संख्याओं के अनुक्रम, परिबद्ध एवं एकदिष्ट अनुक्रम, अभिसारी अनुक्रम, धनात्मक पदों की श्रेणियों का अभिसरण, तुलनात्मक परीक्षण, काशी का nवां मूल परीक्षण, अनुपात परीक्षण, रबे परीक्षण, लघुगणकीय और द मार्गन एवं बर्टेण्ड परीक्षण, एकान्तर श्रेणी एवं लैबनिट्ज़ परीक्षण।

3- Vector Analysis

Operations with vectors, scalar and vector product of two and three vectors and its applications, vector differentiation, gradient, divergence and curl.

सदिश विश्लेषण

सदिशों पर संक्रियायें, दो और तीन सदिशों का अदिश एवं सदिश गुणन और उनके अनुप्रयोग, सदिश अवकलन, ग्रेडियन्ट, डाईवर्जेन्स एवं कर्ल।

4- Complex Analysis

Complex numbers, functions of a complex, variable, De-Moivre's theorem and its applications, nth roots of unity exponential, direct and inverse trigonometric, hyperbolic and logarithmic functions of a complex Variable. Continuity and differentiability of complex functions, Cauchy-Riemann equation, analytic functions, harmonic functions.

सम्मिश्र विश्लेषण

सम्मिश्र संख्यायें, एक सम्मिश्र चर के फलन, द मायवर प्रमेय और इसके अनुप्रयोग, ईकाई के nवें मूल, एक सम्मिश्र फलन के चर घातांकी, सीधे एवं व्युत्क्रम त्रिकोणमितीय, हाईपरबोलिक एवं लघुकणकीय फलन, सम्मिश्र फलनों की सांत्यता एवं अवकलनीयता, काशी रीमान समीकरण, वैश्लेशिक फलन, प्रसंवादी फलन।

5- Calculus

Limit of a function, continuity and differentiability, Rolle's theorem, Langrange's mean value theorem, L'Hospital rule, successive differentiation, tangent and normal, maxima and minima increasing and decreasing functions. Limit, continuity and differentiability of function of two variables, partial differentiation. Methods of integration, definite integrals, application of integration to find area bounded by curves, length of a curve, surface area and volumes of solids of revolution.

Solutions of differential equations of first order and of first degree.

फलन

फलन की सीमा, सांतत्यता एवं अवकलनीयता रोल का प्रमेय, लाग्रान्ज का मध्यमान प्रमेय, लापिताल नियम, उत्तरोत्तर अवकलन, स्पर्शी एवं अभिलम्ब, उच्चिष्ठ एवं निम्निष्ठ, वर्धमान व ह्रासमान फलन, दो चरों के फलन की सीमा, सांतत्यता एवं अवकलनीयता, आंशिक अवकलन, समाकलन की विधियाँ, निश्चित समाकल, वक्रों द्वारा परिबद्ध क्षेत्रफल, वक्र की लम्बाई, घूर्णन द्वारा बने ठोसों का पृष्ठीय क्षेत्रफल एवं आयतन को ज्ञात करने में समाकलन का अनुप्रयोग।

6- Geometry

General equation of second degree and its classification as pair of straight lines, circle, parabola, ellipse and hyperbola, Asymptotes of hyperbola, Transferring of origin and rotation of axis.

Direction cosines and direction ratio's of a line, Cartesian and Vector equation of a plane Cartesian and vector equation of line, coplanar and skew lines, shortest distance between two lines, angle between two planes, two lines, a line and a plane, distance of a point from a plane, sphere, cone and cylinder.

ज्यामिति

द्वितीय घात के व्यापक समीकरण तथा इसका रेखायुग्म, वृत्त, परवलय, दीर्घवृत्त एवं अतिपरवलय के रूप में वर्गीकरण, अतिपरवलय के अनन्तस्पर्शी, मूल बिन्दु का विस्थापन एवं निर्देशांक अक्षों का घूर्णन, रेखा की दिक्कोज्यायें एवं दिक्अनुपा, समतल का कार्तीय एवं सदिश समीकरण, रेखा का कार्तीय एवं सदिश समीकरण, समतलीय एवं असमतलीय रेखाएं, दो रेखाओं के बीच की न्यूनतम दूरी, दो समतलों के बीच, दो रेखाओं के बीच, एक रेखा एवं एक समतल के बीच के कोण, एक बिन्दु की एक समतल से दूरी, गोला, शंकु एवं बेलन।

7- Statistics and Probability

Frequency distribution, Graphical representation of statistical data, Measures of central tendency – Mean, median and mode of grouped and ungrouped data. Theorems on addition and Multiplication of probability.

सांख्यिकी एवं प्रायिकता

बारंबारता बंटन, सांख्यिकीय आंकड़ों का आलेखीय निरूपण, केन्द्रीय प्रवृत्ति की मापें, सामूहिक तथा असामूहिक आंकड़ों के माध्य, माध्यिका एवं बहुलक, प्रायिकता के योग एवं गुणन की प्रमेय।

उत्तर प्रदेश लोक सेवा आयोग एल.टी. ग्रेड परीक्षा, 2018
गणित
व्याख्या सहित हल प्रश्न-पत्र

1. If the maximum and minimum values of $(5+6\cos\theta+2\cos 2\theta)$ satisfy the quadratic equation $x^2-px+q=2$, then p, q are respectively
यदि $(5+6\cos\theta+2\cos 2\theta)$ के अधिकतम और न्यूनतम मान, द्विघात समीकरण $x^2-px+q=2$ को संतुष्ट करते हैं, तो p, q हैं, क्रमशः

(a) 13, 12 (b) 12, 13
(c) 14, 13 (d) 13, 14

Ans : (*) $y = 5 + 6\cos\theta + 2\cos 2\theta$
$= 5 + 6\cos\theta + 2(2\cos^2\theta - 1)$
$= 5 + 6\cos\theta + 4\cos^2\theta - 2$
$= 4\cos^2\theta + 6\cos\theta + 3$
$= (2\cos\theta + 3/2)^2 - 9/4 + 3$
$= (2\cos\theta + 3/2)^2 + ¾$
Now maximum value of y
$y_{max} = (2 + 3/2)^2 + 3/4 = 13$
and minimum value of y
$y_{min} = 3/4$
Now if these satisfy $x^2 - px + q = 2$ then
$13^2 - 13p + q = 2$ …(i)
& $(3/4)^2 - 3/4p + q = 2$ …(ii)

$\Rightarrow \quad 169 - \frac{9}{16} - 13p + \frac{3p}{4} = 0$

$\Rightarrow \quad \frac{49p}{4} = \frac{2695}{16}$

$\Rightarrow \quad p = \frac{2695}{49\times 4} = \frac{55}{4}$ and $q = \frac{47}{4}$

2. The sum of the series 72 + 70 + 68 + ... + 40 is
श्रेणी 72 + 70 + 68 + ... + 40 का योगफल है

(a) 950 (b) 952
(c) 954 (d) 956

Ans : (b) 72, 70, 68, ..., 40 is an arithmetic progression with first term a = 72, common difference d= –2, and last term l = 40 then
$l = a + (n - 1)d$
$\Rightarrow \quad 40 = 72 + (n-1)(-2)$
$\Rightarrow \quad \frac{-32}{-2} = n - 1$
$\Rightarrow \quad n = 17$
$\therefore \quad S_n = 72 + 70 + 68 + ... + 40 = \frac{n}{2}[a + \ell]$
$= \frac{17}{2}[72 + 40] = \frac{17\times 112}{2}$
$\Rightarrow \quad S_n = 952$

3. Given that the set Z of integers forms a group under the binary operation *, defined by
a*b = a + b + 1; a, b∈Z
The inverse of –2 in the group is
दिया गया है कि पूर्णांक संख्याओं का समुच्चय Z, द्वि-आधारी संक्रिया *, जो a*b = a + b + 1; a, b∈Z द्वारा परिभाषित है, के सापेक्ष एक समूह बनाता है। इस समूह में -2 का प्रतिलोम है

(a) 2 (b) 4
(c) –2 (d) 0

Ans : (d) For the binary operation
a*b = a + b + 1; a, b∈Z
defined on Z let e ∈ Z be the identity element then
aoe = a
$\Rightarrow$ a+e+1 = a
$\Rightarrow$ e = –1
Now if a^{-1} is the inverse of a then
$aoa^{-1} = e$
$\Rightarrow$ $a + a^{-1} + 1 = -1$
$\Rightarrow$ $a^{-1} = -2-a$
and hence $(-2)^{-1} = -2+2 = 0$

4. The sum of first ten terms of the series $\frac{1}{21}+\frac{1}{77}+\frac{1}{165}+....$ is
श्रेणी $\frac{1}{21}+\frac{1}{77}+\frac{1}{165}+....$ के प्रथम दस पदों का योग है

(a) $\frac{10}{129}$ (b) $\frac{20}{129}$
(c) $\frac{30}{129}$ (d) $\frac{40}{129}$

Ans : (d) $\frac{1}{21}+\frac{1}{77}+\frac{1}{165}+...+$
$\left[\frac{1}{3\times 7}+\frac{1}{7\times 11}+\frac{1}{11\times 15}+...\right]$
hence 10^{th} term is $\frac{1}{39\times 43}$
Therefore, $\left[\frac{1}{3\times 7}+\frac{1}{7\times 11}+\frac{1}{11\times 15}+...+\frac{1}{39\times 43}\right]$
$= \frac{1}{4}\left[\frac{4}{3}-\frac{4}{7}+\frac{4}{7}-\frac{4}{11}+...+\frac{4}{43}\right]$
$= \frac{1}{4}\left[\frac{4}{3}-\frac{4}{43}\right]$
$= \frac{1}{4}\times\frac{40\times 4}{129} = \frac{40}{129}$

5. The condition that the equations $ax^2+bx+c=0$, $a'x^2+b'x+c'=0$ have a common root is
समीकरणों $ax^2+bx+c=0$, $a'x^2+b'x+c'=0$ के एक उभयनिष्ठ मूल होने का प्रतिबंध है।

(a) $(bc'-b'c)^2=(ca'-c'a)(ab'-a'b)$

(b) $(ab'-a'b)^2=(ca'-c'a)(bc'-b'c)$

(c) $(ca'-c'a)^2=(bc'-b'c)(ab'-a'b)$

(d) None of the above /उपर्युक्त में से कोई नहीं

Ans : (c) If $ax^2+bx+c=0$ & $a'x^2+b'x+c'=0$ have a common root α then we have

$$\frac{\alpha^2}{bc'-cb'}=\frac{-\alpha}{ac'-ca'}=\frac{1}{ab'-ba'}$$

$$\alpha^2=\frac{bc'-cb'}{ab'-ba'} \quad \text{... (i)}$$

$$\alpha=\frac{ca'-ac'}{ab'-ba'} \quad \text{... (ii)}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{ca'-ac'}{ab'-ba'}\right)^2=\frac{bc'-cb'}{ab'-ba'}$$

$$\Rightarrow \quad (ca'-ac')^2=(bc'-cb')(ab'-ba')$$

6. The value of p for which the sum of the squares of the roots of the equation $x^2-(p-2)x-p+1=0$ is minimum, will be
p का वह मान, जिसके लिए समीकरण $x^2-(p-2)x-p+1=0$ के मूलों के वर्गों का योग न्यूनतम हो, होगा

(a) 0 (b) 1
(c) 2 (d) 3

Ans : (b) For $x^2-(p-2)x-p+1=0$ we have

$$\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=p-2 \;\&\; \alpha\beta=\frac{c}{a}=1-p$$

$$\therefore \quad \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$$
$$=(p-2)^2-2(1-p)$$
$$=p^2+4-4p-2+2p$$
$$=p^2+2-2p$$
$$=(p-1)^2+1$$

which is minimum if $p-1=0 \Rightarrow p=1$.

7. The domain of the function $f(x)=\frac{\log_2(x+3)}{x^2+3x+2}$ is

फलन $f(x)=\frac{\log_2(x+3)}{x^2+3x+2}$ का प्रान्त है

(a) $R-\{-1,-2\}$ (b) $(-2,\infty)$
(c) $R-\{-1,-2,-3\}$ (d) $(-3,\infty)-\{-1,-2\}$

Ans : (d) For $f(x)=\frac{\log_2(x+3)}{x^2+3x+2}$ we must have

$$x+3>0$$
$$x>-3 \Rightarrow x\in(-3,\infty)$$

and
$$x^2+3x+2\neq 0$$
$$\Rightarrow x(x+2)+1(x+2)\neq 0$$
$$\Rightarrow (x+2)(x+1)\neq 0$$
$$x\notin\{-1,-2\}$$

Hence domain of f(x) is $(-3,\infty)-\{-1,-2\}$.

8. Let * be a binary operation defined on the set of positive rational number Q^+ by the rule $a*b=\frac{ab}{3},\forall a,b\in Q^+$. Then The inverse of 4* 6 is
मान लीजिए कि * एक द्वि-आधारी संक्रिया, धनात्मक परिमेय संख्याओं के समुच्चय Q^+ पर नियम $a*b=\frac{ab}{3},\forall a,b\in Q^+$ द्वारा परिभाषित है। तब 4* 6 का प्रतिलोम है

(a) $\frac{9}{8}$ (b) $\frac{2}{3}$
(c) $\frac{3}{8}$ (d) $\frac{3}{2}$

Ans : (a) For the binary operation

$$a*b=\frac{ab}{3},\forall a,b\in Q^+$$

defined on Q^+ let $e\in Q^+$ be the identity element then

$$aoe=a$$
$$\Rightarrow \quad \frac{ae}{3}=a$$
$$\Rightarrow \quad e=3$$

and if a^{-1} is the inverse of a then

$$aoa^{-1}=e$$
$$\Rightarrow \quad \frac{aa^{-1}}{3}=3$$
$$\Rightarrow \quad a^{-1}=\frac{9}{a}$$
$$\because \quad 4*6=\frac{4\times 6}{3}=8$$

and hence $(8)^{-1}=\frac{9}{8}$

9. The least order of non-Abelian group is
अन-आबेली समूह की न्यूनतम कोटि है

(a) 4 (b) 5
(c) 6 (d) 8

Ans : (c) Group of order 1 is the trivial group and hence is Abelian. Groups of order 2, 3 and 5 are of prime order and hence are Abelian. Group of order 4 are of the form p^2, hence abelian. Group of order 6 is non-Abelian. Hence, minimum order of a non-Abelian group is 6.

10. If the function f: R→R is defined by $f(x) = x^2+x$ then the function f is
यदि फलन f: R→R , $f(x) = x^2+x$ से परिभाषित है, तो फलन f है

(a) one-one but not onto /एकैकी पर आच्छादक नहीं
(b) onto but not one-one /आच्छादक पर एकैकी नहीं
(c) both one-one and onto
एकैकी एवं आच्छादक दोनों
(d) neither one-one nor onto
न तो एकैकी, न ही आच्छादक

Ans : (d) We have $f(x) = x^2 + x$; $x \in R$. Now if

$f(x_1) = f(x_2)$

$\Rightarrow \quad x_1^2 + x_1 = x_2^2 + x_2$

$\Rightarrow \quad x_1^2 - x_2^2 = x_2 - x_1$

$\Rightarrow \quad (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = -(x_1 - x_2)$

$\Rightarrow \quad x_1 + x_2 = -1$

hence f is not one-one. Now

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

i.e. $\quad f(x) \geq -\frac{1}{4} \; \forall x \in R$

which clearly shows that f is not onto.

11. Consider the following statements:
I. If A is skew-symmetric matrix, then A^2 is symmetric.
II. Trace of a skew-symmetric matrix of an odd order is always zero.
Which of the above statements is/are true?
निम्नलिखित कथनों पर विचार कीजिए
I. यदि एक विषम-सममित आव्यूह है, तो A^2 सममित होगा।
II. एक विषम कोटि वाले विषम-सममित आव्यूह का अनुरेख सदैव शून्य होता है।
उपर्युक्त कथनों में से कौन-सा/से सत्य है/हैं?

(a) Only I /केवल I
(b) Only II /केवल II
(c) Both I and II / I और II दोनों
(d) Neither I nor II /न तो I, न ही II

Ans : (c) (I) If A is a skew symmetric matrix then we have

$A^T = -A$

$\Rightarrow \quad -AA^T = A^2$

$\Rightarrow \quad A^TA^T = A^2$

$\Rightarrow \quad (A^2)^T = A^2$

Therefore, A^2 is a symmetric matrix.

(II) In a skew symmetric matrix of order n diagonal elements are always zero. Therefore, trace of a skew symmetric matrix of order n, which is the sum of all the diagonal elements, is always zero.

12. The system of equations

$$x + 2y + 3z = 1$$
$$2x + y + 3z = 2$$
$$x + y + 2z = 3$$

has
समीकरण निकाय

$$x + 2y + 3z = 1$$
$$2x + y + 3z = 2$$
$$x + y + 2z = 3$$

का

(a) no solution /कोई हल नहीं है
(b) unique solution /अद्वितीय हल है
(c) infinite solution /अनन्त हल है
(d) None of the above /उपर्युक्त में से कोई नहीं

Ans : (a)

$$x + 2y + 3z = 1$$
$$2x + y + 3z = 2$$
$$x + y + 2z = 3$$

Augmented matrix is

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 + R_2]{R_2 \to -\frac{1}{3}R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

hence solution does not exist.

13. If A is a 2×2 matrix such that trace (A) = 6, |A|=12, then trace (A^{-1}) is
यदि A एक 2×2 आव्यूह इस प्रकार है कि अनुरेख a=6, |A|=12, तो अनुरेख (A^{-1}) है

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{3}$
(c) $\frac{1}{6}$ (d) 1

Ans : (a) We have for a 2×2 invertible matrix A that

trace (A) = trace (adj A)

& $\quad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}$ (adj A)

which gives that trace $(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$ trace (adj A)

$$= \frac{1}{12} \text{ trace (A)}$$

$$= \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

14. **If $f\left(x-\frac{1}{x}\right)=x^3-\frac{1}{x^3}$, then the value of f(1) is**

यदि $f\left(x-\frac{1}{x}\right)=x^3-\frac{1}{x^3}$, तब f(1) का मान है

(a) –2 (b) –1
(c) 0 (d) 4

Ans : (d) Given, $f\left(x-\frac{1}{x}\right)=x^3-\frac{1}{x^3}$

$\Rightarrow f\left(x-\frac{1}{x}\right)=\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}+1\right)$

$\Rightarrow f\left(x-\frac{1}{x}\right)=\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+3\right)$

Therefore, f(1) = (1) (3+1) = 4

15. **For the equation $|x^2|+|x|-6=0$**
समीकरण $|x^2|+|x|-6=0$ के लिए

(a) there is only one root /केवल एक मूल है
(b) the sum of roots is –1/मूलों कायोग –1 है
(c) the product of roots is –4
मूलों का गुणनफल –4 है
(d) there are four roots /चार मूल हैं

Ans : (c) $|x|^2+|x|-6=0$

$|x|^2+3|x|-2|x|-6=0$

$|x|\{|x|+3\}-2\{|x|+3\}=0$

$\{|x|+3\}\{|x|-2\}=0$

$|x|=-3$ (सम्भव नहीं)

$|x|=2$

तो $x=\pm2$

अतः मूलों का गुणनफल –4 होगा।

16. **If the roots of the equation $(a-b)x^2+(c-a)x+(b-c)=0$ are equal then a, b, c are in**

यदि समीकरण $(a-b)x^2+(c-a)x+(b-c)=0$ के मूल बराबर हों, तो a, b, c हैं

(a) arithmetic progression /समान्तर श्रेढ़ी में
(b) geometric progression /गुणोत्तर श्रेढ़ी में
(c) harmonic progression /हरात्मक श्रेढ़ी में
(d) None of the above /उपर्युक्त में से कोई नहीं

Ans : (a) Since, roots of the equation
$(a-b)x^2+(c-a)x+(b-c)=0$ are equal

$\therefore$ Discriminant, $B^2-4AC=0$

$\Rightarrow (c-a)^2-4(a-b)(b-c)=0$

$\Rightarrow a^2+4b^2+c^2+2ac-4ab-4bc=0$

$\Rightarrow (a+c-2b)^2=0$

$\Rightarrow a+c=2b$

Hence, a, b, c are in A.P.

17. **If f(x) = cos |x| and g(x)=sin|x|, then**
यदि f(x) = cos |x| और g(x)=sin|x|, तो

(a) both f and g are even functions
f और g दोनों सम फलन है
(b) both f and g are odd functions
f और g दोनों विषम फलन हैं
(c) f is an even function and g is an odd function
f एक सम फलन तथा g एक विषम फलन है
(d) f is an odd function and g is an even function
f एक विषम फलन तथा g एक सम फलन है

Ans : (a) $f(x)=\cos|x|, \quad g(x)=\sin|x|$

$f(-x)=\cos|-x|=\cos x=f(x)$

& $g(-x)=\sin|-x|=\sin x=g(x)$

hence f and g both are even functions.

18. **If $f(x)=\begin{vmatrix}1 & x & x^2\\ x & x^2 & 1\\ x^2 & 1 & x\end{vmatrix}$ then the value of $f\left(\sqrt[3]{3}\right)$ is**

यदि $f(x)=\begin{vmatrix}1 & x & x^2\\ x & x^2 & 1\\ x^2 & 1 & x\end{vmatrix}$ तो $f\left(\sqrt[3]{3}\right)$ का मान है

(a) –6 (b) 6
(c) 4 (d) –4

Ans : (d)

$f(x)=\begin{vmatrix}1 & x & x^2\\ x & x^2 & 1\\ x^2 & 1 & x\end{vmatrix}$

$=1(x^3-1)-x(x^2-x^2)+x^2(x-x^4)$

$\Rightarrow f(x)=x^3-1+x^3-x^6$

$\Rightarrow f\left(\sqrt[3]{3}\right)=(3)^{\frac{1}{3}\times3}-1+(3)^{\frac{1}{3}\times3}-(3)^{\frac{1}{3}\times6}$

$=3-1+3-9$

$=-4$

19. **Let R be a relation on a set A and Let I_A denote the identity relation on A. Then R is antisymmetric, if and only if**
मान लीजिए कि किसी समुच्चय A पर R एक संबंध है तथा मान लीजिए कि I_A, A पर तत्समक संबंध को दर्शाता है। तब R प्रतिसममित है, यदि और केवल यदि

(a) $R=R^{-1}$
(b) $R\cup R^{-1}\subseteq I_A$
(c) $R\cap R^{-1}\subseteq I_A$
(d) None of the above /उपर्युक्त में से कोई नहीं

Ans : (a) A relation R is antisymmetric iff whenever (x, y) $\in$ R, (y, x) $\notin$ R or iff whenever (x, y) and (y, x) are in R we must have x = y.
Now if $R= R^{-1}$ then we get x = y and hence R is antisymmetric.

20. If x is the first term of a geometric progression and the sum of its infinite terms is $\frac{1}{3}$, then x lies in the interval
यदि एक गुणोत्तर श्रेढ़ी का प्रथम पद x तथा इसके अनन्त पदों का योगफल $\frac{1}{3}$ हो, तो x है अंतराल

(a) $0 < x < \frac{1}{2}$ (b) $-1 < x < \frac{1}{4}$

(c) $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ (d) $0 < x < \frac{2}{3}$

Ans : (d) If an infinite geometric series converges then common ratio r must satisfy |r| < 1. Now if x is first term of geometric progression and sum of its infinite terms is $\frac{1}{3}$ then

$$\frac{1}{3} = \frac{x}{1-r} \Rightarrow 1-r = 3x \Rightarrow r = 1-3x$$

$\Rightarrow$ $|1-3x| < 1$

$\Rightarrow$ $-1 < 1-3x < 1$

$\Rightarrow$ $0 < -3x < 2$

$\Rightarrow$ $0 < x < \frac{2}{3}$

21. If $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = s, |r| < 1$, then $\sum_{n=0}^{\infty} r^{2n}$ is equal to
यदि $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = s, |r| < 1$, तो $\sum_{n=0}^{\infty} r^{2n}$ बराबर है

(a) $\frac{s^2}{2s+1}$ (b) $\frac{s^2}{2s-1}$

(c) $\frac{2s}{s^2-1}$ (d) s^2

Ans : (b) Since, $1 + r + r^2 + ...\infty = s$

$\therefore$ $\frac{1}{1-r} = s \Rightarrow r = \frac{s-1}{s}$ ...(i)

Now, $1 + r^2 + r^4 + ...\infty = \frac{1}{1-r^2} = \frac{1}{1-\left(\frac{s-1}{s}\right)^2}$

$$= \frac{s^2}{s^2-(s-1)^2} = \frac{s^2}{(2s-1)}$$

22. The infinite series $\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + ...\infty$ is convergent, if
अनन्त श्रेणी $\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + ...\infty$ अभिसारी है, यदि

(a) p = 0 (b) p<1

(c) p = 1 (d) p>1

Ans : (d) We have

$$\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + ...\infty = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

Now by Cauchy Condensation Test $\sum \frac{1}{n^p}$ converges if and only if $\sum 2^n \left(\frac{1}{2^n}\right)^p$ converges. Now

$$\sum 2\left(\frac{1}{2^n}\right)^p = \sum \left(\frac{1}{2^n}\right)^{p-1} = \sum \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right) n$$

which is a geometric series and converges if and only if $\left|\frac{1}{2^{p-1}}\right| < 1$ which on solving for p gives p>1.

23. Which one of the following sequences is not convergent?
निम्न अनुक्रमों में से कौन-सा एक अभिसारी नहीं है?

(a) $\langle 1+(-1)^n \rangle$ (b) $\left\langle \frac{n}{n+1} \right\rangle$

(c) $\left\langle 1+\frac{(-1)^n}{n} \right\rangle$

(d) None of the above /इनमें से कोई नहीं

Ans : (a)

(a) $\langle 1+(-1)^n \rangle = \langle 0,2,0,2,0,2,... \rangle$ is an oscillatory sequence.

(b) $\left\langle \frac{n}{n+1} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, ... \right\rangle$ is a convergent sequence.

(c) $\left\langle 1+\frac{(-1)^n}{n} \right\rangle = \left\langle 0, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \frac{4}{5}, ... \right\rangle$ is a convergent sequence.

24. If $(1+x+x^2)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{2n}x^{2n}$ then $(a_0 + a_2 + a_4 + ... + a_{2n})$ is equal to
यदि $(1+x+x^2)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{2n}x^{2n}$ तब $(a_0 + a_2 + a_4 + ... + a_{2n})$ बराबर है

(a) $\frac{3^n-1}{2}$ (b) $\frac{3^n+1}{2}$

(c) $\frac{3^n+2}{2}$ (d) $\frac{3^n-2}{2}$

Ans : (b) $(1+x+x^2)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{2n}x^{2n}$

x = 1 रखने पर

$(3)^n = a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_{2n}$ ... (i)

पुनः $x = -1$ रखने पर

$(1)^n = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + ... + a_{2n}$ ...(ii)

समीकरण (i) व (ii) को जोड़ने पर

$2(a_0 + a_2 + ... + a_{2n}) = 3^n + 1$

$\Rightarrow$ $a_0 + a_2 + a_4 + ... + a_{2n} = \frac{3^n+1}{2}$

25. Every subgroup of an Abelian group is not
एक आबेली समूह का प्रत्येक उपसमूह नहीं है

(a) cyclic /चक्रीय
(b) Abelian /आबेली
(c) normal /प्रसामान्य
(d) None of the above /उपर्युक्त में से कोई नहीं

Ans : (a) Every subgroup of an Abelian group is Abelian and hence normal but subgroup of an Abelian group need not be cyclic as additive group of real numbers R is Abelian but additive subgroup of rational numbers Q is non-cyclic.

26. If $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|^2+\left|\vec{a}.\vec{b}\right|^2=144$ and $|\vec{a}|=4$, then $|\vec{b}|$ is equal to
यदि $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|^2+\left|\vec{a}.\vec{b}\right|^2=144$ और $|\vec{a}|=4$ हो, तो $|\vec{b}|$ बराबर है

(a) 12 (b) 8
(c) 4 (d) 3

Ans : (d) We have

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|^2+\left|\vec{a}.\vec{b}\right|^2=\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2\left(\sin^2\theta+\cos^2\theta\right)=\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2$$

$$\Rightarrow \left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2=144$$

$$\Rightarrow \left|\vec{b}\right|^2=\frac{144}{16}=9$$

$$\Rightarrow \left|\vec{b}\right|=3$$

27. If $\vec{F}=x^2y\hat{i}+xz\hat{j}+2yz\hat{k}$ then the value of div curl $\vec{F}$ is
यदि $\vec{F}=x^2y\hat{i}+xz\hat{j}+2yz\hat{k}$ हो, तो div curl $\vec{F}$ का मान है

(a) 0 (b) 1
(c) 2 (d) 3

Ans : (a) Given, $\vec{F}=x^2y\hat{i}+xz\hat{j}+2yz\hat{k}$

$$\text{curl}\,\vec{F}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ x^2y & xz & 2yz\end{vmatrix}$$

$$=\hat{i}(2z-x)-\hat{j}(0-0)+\hat{k}\left(z-x^2\right)$$

$$=\hat{i}(2z-x)+\hat{k}\left(z-x^2\right)$$

$$\text{div curl}\ \vec{F}=\nabla.\left[\hat{i}(2z-x)+\hat{k}\left(z-x^2\right)\right]$$

$$=\left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{j}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right).\left[\hat{i}(2z-x)+\hat{k}\left(z-x^2\right)\right]$$

$$=-1+0+1=0$$

28. If $\vec{a}$ and $\vec{b}$ are constant vectors, then $\nabla\left(\left[\vec{r},\vec{a},\vec{b}\right]\right)$ is equal to
यदि $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ अचर सदिश हैं, तो $\nabla\left(\left[\vec{r},\vec{a},\vec{b}\right]\right)$ बराबर है

(a) 0 (b) $\left(\vec{a}.\vec{b}\right)\vec{r}$
(c) $\vec{a}\times\vec{b}$ (d) $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)|\vec{r}|$

Ans : (c) We have $\left[\vec{r},\vec{a},\vec{b}\right]=\vec{r}.\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$ and if $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\vec{A}$
then let $\vec{A}=A_1\hat{i}+A_2\hat{j}+A_3\hat{k}$ & $\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$ and

$$\vec{r}.\vec{A}=A_1x+A_2y+A_3z$$

$$\Rightarrow\left[\vec{r},\vec{a},\vec{b}\right]=A_1x+A_2y+A_3z$$

Therefore

$$\nabla\left[\vec{r},\vec{a},\vec{b}\right]=\left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{j}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(A_1x+A_2y+A_3z\right)$$

$$=A_1\hat{i}+A_2\hat{j}+A_3\hat{k}=\vec{A}=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$$

29. The value of $\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)\times\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$ is
$\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)\times\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$ का मान है

(a) $\hat{0}$ (b) $\left[\vec{b},\vec{c},\vec{a}\right]\vec{b}$
(c) $\left[\vec{c},\vec{a},\vec{b}\right]\vec{c}$ (d) $\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]\vec{a}$

Ans : (d)
We know that

$$\vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)=\left(\vec{A}.\vec{C}\right)\vec{B}-\left(\vec{A}.\vec{B}\right)\vec{C}$$

then, $\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)\times\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\left[\left(\vec{c}\times\vec{a}\right).\vec{b}\right]\vec{a}-\left[\left(\vec{c}\times\vec{a}\right).\vec{a}\right]\vec{b}$

$$=\left[\left(\vec{c}\times\vec{a}\right).\vec{b}\right]\vec{a}-0 \qquad \left\{\because\left[\vec{c},\vec{a},\vec{a}\right]=0\right\}$$

$$=\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]\vec{a}$$

30. div $\left(\vec{r}\times\vec{a}\right)$, where $\vec{a}$ is a constant vector, is equal to
div $\left(\vec{r}\times\vec{a}\right)$, जहाँ $\vec{a}$ एक अचर सदिश है, बराबर है

(a) 0 (b) $|\vec{a}|$
(c) $|\vec{r}|$ (d) $\vec{a}.\vec{r}$

Ans : (a) $\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}, \quad \vec{a}=a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$

$$\vec{r}\times\vec{a}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ x & y & z\\ a_1 & a_2 & a_3\end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow\vec{r}\times\vec{a}=\hat{i}\left(a_3y-a_2z\right)-\hat{j}\left(a_3x-a_1z\right)+\hat{k}\left(a_2x-a_3y\right)$$

Now $\text{div}\left(\vec{r}\times\vec{a}\right)=\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{r}\times\vec{a}\right)$

$$=\left[\hat{i}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{j}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right].\left(\vec{r}\times\vec{a}\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(a_3y-a_2z\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(-a_3x+a_1z\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(a_2x-a_1y\right)$$

$$=0+0+0$$

$\therefore \quad \boxed{\text{div}\left(\vec{r}\times\vec{a}\right)=0}$

31. If vectors $\vec{A}$ and $\vec{B}$ are irrotational, then
यदि $\vec{A}$ और $\vec{B}$ अघूर्णनीय सदिश हैं, तो

(a) $\vec{A}\times\vec{B}$ is irrotational / $\vec{A}\times\vec{B}$ अघूर्णनीय है
(b) $\vec{A}\times\vec{B}$ is solenoidal / $\vec{A}\times\vec{B}$ परिनालिकीय है
(c) $\vec{A}-\vec{B}$ is rotational / $\vec{A}-\vec{B}$ घूर्णनीय है
(d) None of the above /उपर्युक्त में से कोई नहीं

Ans : (b) $\vec{A}$ and $\vec{B}$ vector are irrotational, then
$\text{curl}\left(\vec{A}\right)=0, \text{curl}\left(\vec{B}\right)=0$
We know

$$\nabla\cdot\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)=\vec{B}\cdot\left(\nabla\times\vec{A}\right)-A\cdot\left(\nabla\times\vec{B}\right)=\vec{B}\cdot0-\vec{A}\cdot0$$
$$\Rightarrow \quad \nabla\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)=0$$

Therefore, $\vec{A}\times\vec{B}$ is solenidal.

32. The vector $\frac{\hat{r}}{|\vec{r}|^3}$, where $\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$, is
सदिश $\frac{\hat{r}}{|\vec{r}|^3}$, जहाँ $\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$, है

(a) only solenoidal /केवल परिनालिकीय
(b) only irrotational /केवल अघूर्णनीय
(c) both solenoidal and irrotational
परिनालिकीय और अघूर्णनीय दोनों
(d) neither solenoidal nor irrotational
न तो परिनालिकीय, न ही अघूर्णनीय

Ans : (c) We have $\frac{\hat{r}}{|\vec{r}|^3}=\frac{x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}}{x^2+y^2+z^2}$. Then

$$\text{div}\left(\frac{\hat{r}}{|\vec{r}|^3}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2+z^2}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2+z^2}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{x^2+y^2+z^2}\right)$$
$$=\frac{-x^2+y^2+z^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}+\frac{x^2-y^2+z^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}+\frac{x^2+y^2-z^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}=0$$

hence $\frac{\hat{r}}{|\vec{r}|^3}$ is solenoidal and

$$\text{curl}\left(\frac{\hat{r}}{|\vec{r}|^3}\right)=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{x}{x^2+y^2+z^2} & \frac{y}{x^2+y^2+z^2} & \frac{z}{x^2+y^2+z^2}\end{vmatrix}$$
$$=\hat{i}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z}{x^2+y^2+z^2}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{y}{x^2+y^2+z^2}\right)\right)$$
$$-\hat{j}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{z}{x^2+y^2+z^2}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x}{x^2+y^2+z^2}\right)\right)$$
$$+\hat{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2+y^2+z^2}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2+z^2}\right)\right)$$
$$=0$$

therefore $\frac{\hat{r}}{|\vec{r}|^3}$ is irrotational.

33. If $\vec{A}\times\vec{B}=\vec{C}\times\vec{D}$ and $\vec{A}\times\vec{C}=\vec{B}\times\vec{D}$, then vectors $\vec{A}-\vec{D}$ and $\vec{B}-\vec{C}$ are
यदि $\vec{A}\times\vec{B}=\vec{C}\times\vec{D}$ और $\vec{A}\times\vec{C}=\vec{B}\times\vec{D}$ तो सदिश $\vec{A}-\vec{D}$ और $\vec{B}-\vec{C}$ हैं

(a) equal /बराबर
(b) parallel /समान्तर
(c) perpendicular /लम्बवत्
(d) inclined at an angle of 60^o
60^o के कोण पर आनत

Ans : (b) Now $\left(\vec{A}-\vec{D}\right)\times\left(\vec{B}-\vec{C}\right)$

$$=\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)-\left(\vec{A}\times\vec{C}\right)-\left(\vec{D}\times\vec{B}\right)+\left(\vec{D}\times\vec{C}\right)$$

then by given we get

$$\left(\vec{C}\times\vec{D}\right)-\left(\vec{B}\times\vec{D}\right)+\left(\vec{B}\times\vec{D}\right)-\left(\vec{C}\times\vec{D}\right)=0$$

So, $\vec{A}-\vec{D}\parallel\vec{B}-\vec{C}$

34. If $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ are non-coplanar unit vectors such that $\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{\sqrt{2}}$, then the angle between $\vec{a}$ and $\vec{b}$ is
यदि $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ असमतलीय ऐसे इकाई सदिश हैं कि $\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{\sqrt{2}}$, तब $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के बीच का कोण है

(a) $\frac{3\pi}{4}$ (b) $\frac{\pi}{4}$
(c) $\frac{\pi}{2}$ (d) π

Ans : (a) $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ are non coplanar unit vector then

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1, \quad \left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]\neq0$$

We know that,

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\left(\vec{a}.\vec{c}\right)\vec{b}-\left(\vec{a}.\vec{b}\right).\vec{c}$$

Now, $\left(\vec{a}.\vec{c}\right)\vec{b}-\left(\vec{a}.\vec{b}\right)\vec{c}=\frac{\vec{b}}{\sqrt{2}}+\frac{\vec{c}}{\sqrt{2}}$

$$\Rightarrow \quad \vec{a}.\vec{c}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow|\vec{a}||\vec{c}|\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{4}$$

and $\vec{a}.\vec{b}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta=\frac{3\pi}{4}$

Thus the angle between $\vec{a}$ and $\vec{b}$ is $\frac{3\pi}{4}$.

35. If $\vec{V}_1,\vec{V}_2,\vec{V}_3$ are three non-zero vectors such that $\vec{V}_1\times\vec{V}_2=\vec{V}_3,\vec{V}_2\times\vec{V}_3=\vec{V}_1$ then
यदि $\vec{V}_1,\vec{V}_2,\vec{V}_3$ तीन ऐसे अशून्य सदिश हों कि $\vec{V}_1\times\vec{V}_2=\vec{V}_3,\vec{V}_2\times\vec{V}_3=\vec{V}_1$ तो

(a) $|\vec{V}_1|=|\vec{V}_2|$ (b) $|\vec{V}_2|=|\vec{V}_3|$
(c) $|\vec{V}_1|=|\vec{V}_3|$ (d) $\vec{V}_2=\vec{V}_1\times\vec{V}_3$

Ans : (c) Given, $\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = \vec{V}_3$ and $\vec{V}_2 \times \vec{V}_3 = \vec{V}_1$

then, $\vec{V}_3.(\vec{V}_1 \times \vec{V}_2) = \vec{V}_3.\vec{V}_3 = |\vec{V}_3|^2$

$\Rightarrow \quad [\vec{V}_3, \vec{V}_1, \vec{V}_2] = |\vec{V}_3|^2$

or $\quad [\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3] = |\vec{V}_3|^2$

and similarly $\vec{V}_2 \times \vec{V}_3 = \vec{V}_1$ gives

$$[\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3] = |\vec{V}_1|^2$$

so, $\quad |\vec{V}_1|^2 = |\vec{V}_3|^2$

$\Rightarrow \quad \boxed{|\vec{V}_1| = |\vec{V}_3|}$

36. The equation $\left|\frac{z-3}{z+3}\right| = 2$ represents

समीकरण $\left|\frac{Z-3}{z+3}\right| = 2$ व्यक्त करता है

(a) a parabola /एक परवलय
(b) a hyperbola /एक अतिपरवलय
(c) a circle /एक वृत्त
(d) an ellipse /एक दीर्घवृत्त

Ans : (c) We have $\left|\frac{z-3}{z+3}\right| = 2$; z = x + iy.

$$\Rightarrow \quad \left|\frac{x+iy-3}{x+iy+3}\right| = 2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(x-3)^2+y^2}{(x+3)^2+y^2} = 4$$

$$\Rightarrow \quad x^2+9-6x+y^2 = 4x^2+36+24x+4y^2$$

$$\Rightarrow \quad x^2+y^2+10x+9 = 0$$

which represents a circle.

37. If $x_n = \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right), n \in N$, then $\lim_{n\to\infty}(x_1.x_2.x_3...x_n)$ is

यदि $x_n = \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right), n \in N$, तो $\lim_{n\to\infty}(x_1.x_2.x_3...x_n)$ है

(a) 0 (b) –1
(c) 1 (d) 2

Ans : (b) If $x_n = \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right), n \in N$ then

we have

$$x_1 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$x_2 = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$x_n = \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = e^{i\frac{\pi}{2^n}}$$

and hence $\lim_{n\to\infty}(x_1.x_2.x_3...x_n) = \lim_{n\to\infty} e^{i\pi\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...\right)}$

$$= e^{i\pi\left(\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\right)} = e^{i\pi} = -1$$

38. If $f(z) = \begin{cases} u(x,y)+iv(x,y), & \text{for } z \neq 0 \\ 0 \quad , & \text{for } z = 0 \end{cases}$

where $u(x,y) = \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$, $v(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

then the value of $\lim_{z\to 0}\frac{f(z)-f(0)}{z-0}$ along y=x, will be

यदि $f(z) = \begin{cases} u(x,y)+iv(x,y), & z \neq 0 \text{ पर} \\ 0 \quad , & z = 0 \text{ पर} \end{cases}$ जहाँ

$u(x,y) = \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$, $u(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$,

तो $\lim_{z\to 0}\frac{f(z)-f(0)}{z-0}$ का मान, y=x के लिए होगा

(a) 1-i (b) $\frac{1-i}{2}$
(c) 1+i (d) $\frac{1+i}{2}$

Ans : (d) If $f(z) = \begin{cases} u(x,y)+iv(x,y), & \text{for } z \neq 0 \\ 0 \quad , & \text{for } z = 0 \end{cases}$

where $u(x,y) = \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$, $v(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ then

$$\lim_{z\to 0}\frac{f(z)-f(0)}{z-0}$$

$$= \lim_{z\to 0}\frac{x^3-y^3+ix^3+iy^3}{x^2+y^2} \Big/ (x+iy)$$

and if y = x

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^3-x^3+ix^3+ix^3}{(x^2+x^2)(x+ix)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2ix^3}{2x^3(1+i)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{i}{(1+i)} = \frac{i+1}{2}$$

39. If $a = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$, then the value of $\left(\frac{1+a}{2}\right)^{3n}$ is

यदि $a = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$, हो, तब $\left(\frac{1+a}{2}\right)^{3n}$ का मान है

(a) $(-1)^n$ (b) $\frac{1}{2^{3n}}$

(c) $\frac{(-1)^n}{2^{3n}}$ (d) $(-1)^n+1$

Ans : (c) $\left(\frac{1+a}{2}\right)^{3n}=\left\{\frac{\left(1+\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)}{2}\right\}^{3n}$

$=\left[\frac{\left\{1+\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)\right\}}{2}\right]^{3n}$

$=\left[\frac{1-\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}}{2}\right]^{3n}=\left[\frac{1-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}\right]^{3n}$

$=\left[\frac{\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}\right]^{3n}=\frac{1}{2^{3n}}\left[\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right]^{3n}$

$=\frac{1}{2^{3n}}\left[\cos\frac{\pi}{3}\times 3n-i\sin\frac{\pi}{3}\times 3n\right]$

$=\frac{1}{2^{3n}}\left[\cos n\pi-i\sin n\pi\right]=\frac{1}{2^{3n}}\left[(-1)^n-0\right]$

$=\frac{(-1)^n}{2^{3n}}$

40. If $\omega(\neq 1)$ is cube root of unity, then the value of $\left(1+\omega^2+2\omega\right)^{3n}-\left(1+\omega+2\omega^2\right)^{3n}$ is

यदि $\omega(\neq 1)$ इकाई का घनमूल हो, तो $\left(1+\omega^2+2\omega\right)^{3n}-\left(1+\omega+2\omega^2\right)^{3n}$ का मान है

(a) 0 (b) 1

(c) ω (d) ω^2

Ans : (a) $\left(1+\omega^2+2\omega\right)^{3n}-\left(1+\omega+2\omega^2\right)^{3n}$

$=\left(-\omega+2\omega\right)^{3n}-\left(-\omega^2+2\omega^2\right)^{3n}$ $\{\because 1+\omega+\omega^2=0\}$

$=(\omega)^{3n}-\left(\omega^2\right)^{3n}$

$=\left(\omega^3\right)^n-\left(\omega^3\right)^{2n}$

$=1^n-1^{2n}$

$=0$

41. If θ is real, then /यदि θ वास्तविक है, तो

(a) $\cos(i\theta)=i\cosh\theta$ (b) $\sin(i\theta)=i\sinh\theta$

(c) $\tan(i\theta)=i\tanh\theta$ (d) $\cot(i\theta)=i\coth\theta$

Ans : (b,c,d) $\cosh\theta=\cos(i\theta)$

$\sinh\theta=-i\sin(i\theta)\Rightarrow\sin(i\theta)=i\sinh\theta$

$\tanh\theta=-i\tan(i\theta)\Rightarrow\tan(i\theta)=i\tanh\theta$

$\Rightarrow$ $\cot(i\theta)=i\coth\theta$

42. If z= x+iy, where $i=\sqrt{-1}$, then $\left|\frac{z-3}{z+3}\right|=2$ represents a circle, whose centre and radius, respectively, are

यदि z= x+iy जहाँ $i=\sqrt{-1}$, तो $\left|\frac{z-3}{z+3}\right|=2$ एक वृत्त निरुपित करता है, जिसका केन्द्र और जिसकी त्रिज्या हैं, क्रमशः

(a) (5, 0), 5 (b) (–5, 0), 2

(c) (–5, 0), 3 (d) (–5, 0), 4

Ans : (d) z= x+iy then $\left|\frac{z-3}{z+3}\right|=2$ gives

$\left|\frac{x-3+iy}{x+3+iy}\right|=2$

$\Rightarrow$ $x^2+9-6x+y^2=4x^2+36+24x+4y^2$

$\Rightarrow$ $3x^2+3y^2+30x+27=0$

$\Rightarrow$ $x^2+y^2+10x+9=0$

$\therefore$ Radius $=\sqrt{(5)^2-9}=4$

and Centre = (–5, 0)

43. If $\omega(\neq 1)$ is a cube root of unity, then the value of $\left\{\left(1-\omega+\omega^2\right)^5+\left(1+\omega-\omega^2\right)^5-32\right\}$ is

यदि $\omega(\neq 1)$ इकाई का घनमूल हो, तो $\left\{\left(1-\omega+\omega^2\right)^5+\left(1+\omega-\omega^2\right)^5-32\right\}$ का मान है

(a) 0 (b) –32

(c) 32 (d) –64

Ans : (a) $\left(1-\omega+\omega^2\right)^5+\left(1+\omega-\omega^2\right)^5-32$

$=\left(-\omega-\omega\right)^5+\left(-\omega^2-\omega^2\right)^5-32$ $\{\because 1+\omega+\omega^2=0\}$

$=\left(-2\omega\right)^5+\left(-2\omega^2\right)^5-32$

$=-32\omega^2-32\omega-32$

$=-32\left(\omega+\omega^2\right)-32$

$=32-32=0$

44. The value of $\sqrt{3-4i}$ is

$\sqrt{3-4i}$ का मान है

(a) 2+i (b) 1+i

(c) 1–i (d) 2–i

Ans : (d) We have z = x + iy and if $z=\sqrt{3-4i}$ then

$z^2=3-4i\Rightarrow x^2-y^2=3\ \&\ 2xy=-4$

$\Rightarrow x^2-\frac{4}{x^2}=3$ (because $y=-\frac{2}{x}$)

$\Rightarrow$ either $x=\pm 2$ and either $y=\mp 1$

$\Rightarrow z=2-i$

45. If $\cos(x+iy) = \cos\alpha + i\sin\alpha$, then the value of $(\cosh 2y + \cos 2x)$ is
यदि $\cos(x+iy) = \cos\alpha + i\sin\alpha$, तो $(\cosh 2y + \cos 2x)$ का मान है

(a) 1 (b) 2
(c) –2 (d) $\sqrt{2}$

Ans : (b) We have
$\cos(x+iy) = \cos\alpha + i\sin\alpha$
$\cos x \cdot \cos iy - \sin\alpha \sin iy = \cos\alpha + i\sin\alpha$
We know that $\{\cos iy = \cos hy, \sin iy = i\sin hy\}$
Now on comparing real and imaginary parts, we get
$\cos\alpha = \cos x \cosh y$
$\sin\alpha = -\sin x \sinh y$
thus $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = (-\sin x.\sinh y)^2 + (\cos x.\cosh y)^2$
$= \sin^2 x .\sinh^2 y + \cos^2 x.\cosh^2 y$
$= \sin^2 x.\sinh^2 y + \cosh^2 y - \sin^2 x.\cosh^2 y$
$= \cosh^2 y - \sin^2 x (\cosh^2 y - \sinh^2 y)$
$\therefore \quad \cosh^2 y - \sin h^2 y = 1$
$1 = \cosh^2 y - \sin^2 x$
therefore,
$\cosh 2y + \cos 2x = \cosh^2 y + \sinh^2 y + \cos^2 x - \sin^2 x$
$= \cosh^2 y + (\cosh^2 y - 1) + (1 - \sin^2 x) - \sin^2 x$
$= 2\cosh^2 y - 2\sin^2 x + 1 - 1$
$= 2[\cos h^2 y - \sin^2 x]$
Then, $\boxed{\cos h 2y + \cos 2x = 2}$

46. The three cube roots of $z = -8i$ are
$z = -8i$ के तीन घनमूल हैं

(a) $2i, -\sqrt{3} - i, \sqrt{3} - i$ (b) $-2i, -\sqrt{3} - i, \sqrt{3} - i$
(c) $2i, -\sqrt{3} - i, \sqrt{3} + i$ (d) $2i, -\sqrt{3} - i, -\sqrt{3} + i$

Ans : (a) Given, $z = -8i$
Then, $(-8i)^{\frac{1}{3}} = -2\times(i)^{\frac{1}{3}}$

$$= -2\times\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= -2\times\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)\right]^{\frac{1}{3}}$$

$$= -2\times\left[\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2n\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2n\pi}{3}\right)\right]$$

for $n = 0, 1, 2$
$(-8i)^{\frac{1}{3}} = 2i, -\sqrt{3} - i, \sqrt{3} - i$

47. If $\mathrm{Im}\left(\frac{z-1}{2z+1}\right) = -4$ then the locus of z is

यदि $\mathrm{Im}\left(\frac{z-1}{2z+1}\right) = -4$ हो, तो z का बिन्दुपथ है

(a) an ellipse /एक दीर्घवृत्त
(b) a parabola /एक परवलय
(c) a straight line /एक सरल रेखा
(d) a circle /एक वृत्त

Ans : (d) $\mathrm{Im}\left(\frac{z-1}{2z+1}\right) = -4$

$$\Rightarrow \quad \frac{(x-1)+iy}{(2x+1)+i2y}\times\frac{(2x+1)-2iy}{(2x+1)-2iy} = -4$$

$$\Rightarrow \quad \frac{-2y(x-1)+y(2x+1)}{(2x+1)^2+4y^2} = -4$$

$$\Rightarrow \quad \frac{-2xy+2y+2xy+y}{4x^2+1+4x+4y^2} = -4$$

$$\Rightarrow \quad 16x^2+16y^2+16x+3y+4 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x^2+y^2+x+\frac{3}{16}y+\frac{1}{4} = 0$$

which represents a circle.

48. If $f(z)=(x^2+ay^2)+ibxy$ is a complex analytic function of $z=x+iy$, then the value of a+b is
यदि $f(z)=(x^2+ay^2)+ibxy$, $z=x+iy$, का एक सम्मिश्र वैश्लेषिक फलन हो, तो a+b का मान है

(a) 0 (b) 1
(c) –1 (d) 2

Ans : (b) Given $f(z)=(x^2+ay^2)+ibxy$
If f(z) is analytic then Cauchy Riemann equations are satisfied and hence we have for
$u(x, y) = x^2+ay^2$, $v(x, y) = bxy$
$u_x = 2x = v_y = bx$ & $v_x = by = -u_y = -2ay$
$\Rightarrow$ $b = 2$ & $a = -1$ $\qquad a = -1$
then $a + b = -1 + 2 = 1$

49. Which one of the following is false?
निम्नलिखित में से से कौन-सा एक गलत है?

(a) $f(z) = \bar{z}$ is nowhere analytic. / $f(z) = \bar{z}$ कहीं भी वैश्लेषिक नहीं है
(b) $f(z) = z^2$ is analytic everywhere.
$f(z) = z^2$ सर्वत्र वैश्लेषिक है
(c) $f(z) = |z|^2$ is analytic at z=0
$f(z) = |z|^2$, z=0 पर वैश्लेषिक है
(d) $f(z) = e^z$ is analytic everywhere.
$f(z) = e^z$ सर्वत्र वैश्लेषिक

Ans : (c) Let $z = x + iy \in C$ and $x, y, \in R$ and $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.
(a) Now if $f(z) = \bar{z} = x - iy$ then
$u(x, y) = x$ and $v(x, y) = -y$
$\Rightarrow u_x = 1 \neq v_y = -1$ and $v_x = 0 = -u_y$
hence all the partial derivatives exist and are continuous in R but Cauchy-Riemann equations are not satisfied. Therefore, f(z) is nowhere analytic function.
(b) $f(z) = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy$
$\Rightarrow$ $u(x, y) = x^2 - y^2$ and $v(x, y) = 2xy$
$\Rightarrow$ $u_x = 2x = v_y$ and $v_x = 2y = -(-2y) = -u_y$

hence all the partial derivatives exist and are continuous in R and Cauchy-Riemann equations are satisfied everywhere. Therefore, f(z) is analytic everywhere.

(c) $f(z)= |z|^2 = x^2 + y^2$

$\Rightarrow$ $u(x, y) = x^2+y^2$ and $v(x, y) = 0$

$\Rightarrow$ $u_x = 2x$, $v_y = 0$ and $v_x = 0$, $u_y = 2y$

Now all the partial derivatives exist and are continuous in R but Cauchy-Riemann equation are only satisfied at origin. Therefore, f(z) is nowhere analytic.

(d) $f(z) = e^z = e^x (\cos y + i \sin y)$. We have

$u(x, y)= e^x \cos y$ and $v(x, y) = e^x \sin y$.

$\Rightarrow u_x = v_y = e^x \cos y$ and $v_x = -u_y = e^x \sin y$

and all the partial derivatives exist and are continuous in R and Cauchy-Riemann equations are satisfied everywhere. Therefore, f(z) is analytic everywhere.

50. For $z \in C$, the inequality $|z+i| > |z-i|$ is

$z \in C$ के लिए असमिका $|z+i| > |z-i|$ है

(a) always true / हमेशा सत्य

(b) never true / कभी भी सत्य नहीं

(c) true for Re z > 0 / Re z > 0 के लिए सत्य

(d) true for Im z> 0 / Im z > 0 के लिए सत्य

Ans : (d): Let $z = x + iy \in C$; $x, y \in R$. Then

$|z+i| > |z-i|$ where $z \in C$

$\Rightarrow$ $|x+iy+i| > |x+iy-i|$

$\Rightarrow$ $|x+i(y+1)| > |x+i(y-1)|$

$\Rightarrow$ $x^2+(y+1)^2 > x^2+(y-1)^2$

$\Rightarrow$ $y^2+1+2y > y^2+1-2y$

$\Rightarrow$ $4y > 0$

$\Rightarrow$ $y > 0$

Thus we must have Im z > 0.

51. The value of $\int_{-3}^{3} \frac{x^2}{1+3^x} dx$ is

$\int_{-3}^{3} \frac{x^2}{1+3^x} dx$ का मान है

(a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{1}{9}$

(c) 3 (d) 9

Ans : (d) Let $I = \int_{-3}^{3} \frac{x^2}{1+3^x} dx$

Putting x = –x

$$I = \int_{-3}^{3} \frac{(-x)^2}{1+3^{-x}} dx$$

$$= \int_{-3}^{3} \frac{x^2 3^x}{1+3^x} dx$$

Then

$$2I = \int_{-3}^{3} \frac{x^2(1+3^x)}{1+3^x} dx$$

$$= \int_{-3}^{3} x^2 dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-3}^{3}$$

$$= \frac{27}{3} + \frac{27}{3} = \frac{54}{3}$$

$$I = \frac{27}{3} = 9$$

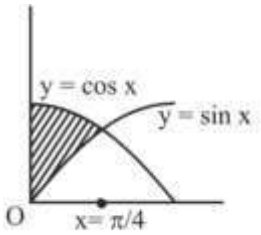
52. The area bounded by the curves y=sinx, y=cosx and y-axis is

y=sinx, y=cosx वक्रों और y-अक्ष द्वारा परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल है

(a) $\sqrt{2}+1$ (b) $\sqrt{2}-1$

(c) $2(\sqrt{2}-1)$ (d) $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$

Ans : (b)



The two curves intersect at $x = \frac{\pi}{4}$.

Required area $= \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x) dx$

$$= [\sin x + \cos x]_0^{\pi/4}$$

$$= \sqrt{2} - 1$$

53. If $\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{ax+b}-3}{x-2} = \frac{1}{2}$, then the value of a, b will be

यदि $\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{ax+b}-3}{x-2} = \frac{1}{2}$ हो, तो a, b का मान होगा

(a) a=b=3 (b) a≠b

(c) a=0, b=4 (d) a=2, b=1

Ans : (a) $\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{ax+b}-3}{x-2} = \frac{1}{2}$

Since denominator tends to 0 as $x \to 2$, numerator must tend to 0 as well because limit is finite and thus

$$\sqrt{2a+b} - 3 = 0 \Rightarrow \sqrt{2a+b} = 3$$

Now Using L'Hospital's rule we get

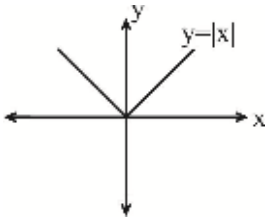
$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{ax+b}-3}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{a}{2\sqrt{ax+b}} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{\sqrt{2a+b}} = 1 \Rightarrow a = \sqrt{2a+b} = 3$$

and hence b = 3.

54. Consider the following statements:
I. y=|x| is differentiable at x=0
II. y = x|x| is differentiable everywhere.
Which of the above statements is/are true?
निम्नलिखित कथनों पर विचार कीजिए।
I. y=|x|, x = 0 पर अवकलनीय है
II. y = x|x| सर्वत्र अवकलनीय है
उपर्युक्त कथनों में से कौन-सा/से सत्य है/हैं?
(a) Only I /केवल I
(b) Only II /केवल II
(c) Both I and II / I और II दोनों
(d) Neither I nor II /न तो, I न ही II

Ans : (b) (I)



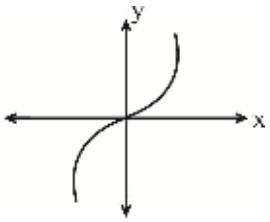
We have for $f(x) = |x|$ that

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-}-\frac{x}{x} = -1$$

and $$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x} = 1$$

and thus f(x) is not differentiable at x=0
(II) If $y = x|x|$ then

$$y = \begin{cases} x^2, & x \ge 0 \\ -x^2, & x < 0 \end{cases}$$



Now f is clearly differentiable at every non-zero x.
At x = 0 we have

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} -x = 0$$

and $$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} x = 0$$

therefore f(x) is differentiable at x = 0.

55. If $\frac{1}{u} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, then $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}$ is equal to
यदि $\frac{1}{u} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, तो $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}$ बराबर है
(a) 0 (b) 2u
(c) –u (d) u^2

Ans : (c) Given $\frac{1}{u} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

or $$u = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1/2}$$

So,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1/2} = -\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}.2x$$

Similarly, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}.2y$,

and $$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}.2z$$

So, $$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z} = -x^2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}$$

$$-y^2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}-z^2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}$$

$$= -\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}.\left(x^2+y^2+z^2\right)$$

$$= -\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1/2} = -u$$

56. The differential equation of the straight lines at a fixed distance p from the origin is
मूलबिन्दु से नियत दूरी p पर सरल रेखाओं का अवकल समीकरण है
(a) $\left(xy'-y\right)^2 = p^2\left(1+y'^2\right)$
(b) $\left(xy'+y\right)^2 = p^2\left(1+y'^2\right)$
(c) $\left(x-yy'\right)^2 = p^2\left(1+y'^2\right)$
(d) $\left(x+yy'\right)^2 = p^2\left(1+y'^2\right)$

Ans : (a) If the straight line is at a fixed distance p then

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p \qquad ...(i)$$

which on differentiating w.r.t. x gives

$$\cos\alpha + \sin\alpha\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \tan\alpha = -\frac{1}{y'} \qquad \left[\because \frac{dy}{dx} = y'\right]$$

$$\therefore \quad \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}},\ \cos\alpha = \frac{-y'}{\sqrt{1+y'^2}} \qquad ...(ii)$$

From equation (i) and (ii), we get

$$\frac{-xy'}{\sqrt{1+y'^2}}+\frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} = p$$

$$\Rightarrow \quad \left(y-xy'\right)^2 = p^2\left(1+y'^2\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\left(xy'-y\right)^2 = p^2\left(1+y'^2\right)}$$

57. The solution of the differential equation $y - x\frac{dy}{dx} = a\left(y^2+\frac{dy}{dx}\right)$ is
अवकल समीकरण $y - x\frac{dy}{dx} = a\left(y^2+\frac{dy}{dx}\right)$ का हल है

(a) $(x+a)(1-ay)=cy$

(b) $(x+a)(1+ay)=cy$

(c) $(x+a)(1+ay)=cx$

(d) $(y+a)(1+ax)=cy$

Ans : (a) Given, $y-x\frac{dy}{dx}=a\left(y^2+\frac{dy}{dx}\right)$

$\Rightarrow \quad y-ay^2=a\frac{dy}{dx}+x\frac{dy}{dx}$

$\Rightarrow \quad y(1-ay)=(a+x)\frac{dy}{dx}$

$\Rightarrow \quad \frac{dx}{a+x}=\frac{dy}{y(1-ay)}$

On integrating both sides, we get

$$\log(a+x)=\int\left[\frac{1}{y}+\frac{a}{1-ay}\right]dy$$

$\Rightarrow \quad \log(a+x)=\log y+\frac{a\log(1-ay)}{-a}+\log c$

$\Rightarrow \quad \log(a+x)=\log y-\log(1-ay)+\log c$

$\Rightarrow \quad \log(x+a)(1-ay)=\log cy$

$\Rightarrow \quad \boxed{(x+a)(1-ay)=cy}$

58. The value of c in Lagrange's mean value theorem of $f(x)=x(x-1)$ in [1, 2] is

[1, 2] में $f(x)=x(x-1)$ के लिए लग्रांज माध्य मान प्रमेय में c का मान है

(a) $\frac{5}{4}$ (b) $\frac{3}{2}$

(c) $\frac{7}{4}$ (d) $\frac{9}{5}$

Ans : (b) Clearly $f(x) = x^2 - x$ is continuous on [1, 2] and differentiable on (1, 2). Now Lagrange Mean Value Theorem states that there exists some $c \in (1, 2)$ such that

$$f'(c)=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=2$$

since $f'(x) = 2x-1$ we get

$f'(c) = 2c-1$

$\Rightarrow \quad 2c-1=2$

$\Rightarrow \quad c=\frac{3}{2}$

59. If $x=a(\cos t+t\sin t)$

$y=a(\sin t-t\cos t)$ then the value of $\frac{d^2y}{dx^2}$ is

यदि $x=a(\cos t+t\sin t)$

$y=a(\sin t-t\cos t)$ तो $\frac{d^2y}{dx^2}$ का मान है

(a) $\frac{t}{a}\sec^3 t$ (b) $at\sec^3 t$

(c) $\frac{1}{a}\frac{\sec^3 t}{t}$ (d) $\frac{a\sec^3 t}{t}$

Ans : (c) Given, $x = a(\cos t + t \sin t)$ ...(i)

and $y = a(\sin t - t \cos t)$ ...(ii)

On differentiating w.r.t. 't', we get

$$\frac{dx}{dt}=a\left[-\sin t+t\cos t+\sin t\right]=at\cos t$$

and, $\frac{dy}{dt}=a[\cos t+t\sin t-\cos t]=at\sin t$

$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{at\sin t}{at\cos t}=\tan t$

$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}.\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(\tan t)=\frac{d}{dt}(\tan t)\frac{dt}{dx}$

$=\frac{1}{at}\sec^3 t$

60. If $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=A$ and $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}=B$, then which of the following is true?

यदि $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=A$ और $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}=B$ है, तो निम्न में से कौन-सा सत्य है?

(a) A=B=0 (b) A=0 and B=∞

(c) A = 1 and B = ∞ (d) A=0 and B=1

Ans : (d) $A=\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$

and $B=\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1$

61. The solution of the differential equation $(x+2y^3)\frac{dy}{dx}=y, y(0)=1$ is

अवकल समीकरण $(x+2y^3)\frac{dy}{dx}=y, y(0)=1$ का हल है

(a) $x+y-y^3=0$ (b) $x-y+y^3=0$

(c) $-x-2y-2y^3=0$ (d) $x+2y-2y^3=0$

Ans : (a) $\left(x+2y^3\right)\frac{dy}{dx}=y$

$\Rightarrow \quad \frac{x}{y}+2y^2=\frac{dx}{dy}$

$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dy}-\left(\frac{1}{y}\right)x=2y^2$

which is a linear differential equation and hence

$$\text{I.F.} = e^{\int P dy} = e^{\int -\frac{1}{y} dy} = e^{-\log y} = \frac{1}{y}$$

therefore, a solution is given by

$$x \times \frac{1}{y} = \int \frac{2y^2}{y} dy$$

$$\frac{x}{y} = y^2 + c$$

and since y = 1 when x = 0, we get

$$\frac{0}{1} = 1 + c \Rightarrow c = -1$$

so $\frac{x}{y} = y^2 - 1 \Rightarrow x = y^3 - y$

$\Rightarrow$ $x + y - y^3 = 0$ is the required solution.

62. $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{e^{\frac{1}{x}} + 1}$ **is equal to**

$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{e^{\frac{1}{x}} + 1}$ **बराबर है**

(a) –1 (b) 1

(c) 0 (d) 2

Ans : (b) $$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{e^{\frac{1}{x}} + 1}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{1 - \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}}}{1 + \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}}} = \frac{1}{1} = 1$$

63. The function $\phi(x) = (x-a)^m (x-b)^n$ satisfies the conditions of Rolle's theorem, when

फलन $\phi(x) = (x-a)^m (x-b)^n$ रॉल के प्रमेय की शर्तों को संतुष्ट करता है, जब

(a) m, n are positive integers / m, n धन पूर्णांक हो

(b) m, n are positive integers and a< b
m, n धन पूर्णांक हो तथा a< b

(c) a < b

(d) m > n

Ans : (b) (Rolle's Theorem). Let f : [a, b] $\to$ R be continuous on [a, b] and differentiable on (a, b). If f(a) = f(b), then there exists a point c $\in$(a, b) where $f'(c) = 0$.

Now if $\phi(x) = (x-a)^m (x-b)^n$ satisfies Rolle's

Theorem then for $\phi(a) = \phi(b) = 0$ we must have that m, n are positive integers and a and b are distinct.

64. Let f : R$\to$R be a differentiable function such that f'(x^2)=4x^2–1 for x> 0 and f(1)=1. Then f(4) is

मान लीजिए f : R$\to$R एक अवकलनीय फलन इस प्रकार है कि f'(x^2)=4x^2–1, x> 0 के लिए, और f(1)=1 तब f(4) है

(a) 64 (b) 30

(c) 42 (d) 28

Ans : (d) We have

$$f'(x^2) = 4x^2 - 1$$

Now let $x^2 = t$ then

$$f'(t) = 4t - 1$$

$\Rightarrow$ $f(t) = 2t^2 - t + c$

$\Rightarrow$ $f(x^2) = 2x^4 - x^2 + c$ ...(i)

and f (1) = 1gives

$$f(1^2) = 2 \times 1 - 1 + c$$

$\Rightarrow$ $1 = 2 - 1 + c \Rightarrow c = 0$

Therefore

$$f(4) = f(2^2) = 2 \times 2^4 - 2^2 = 32 - 4 = 28$$

65. If $y = x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$ to infinity, then $x\frac{dy}{dx}$ is equal to

यदि $y = x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$ अनंत तक, तो $x\frac{dy}{dx}$ बराबर है

(a) $\frac{y^2}{y - x\log_e x}$ (b) $\frac{y^2}{x - y\log_e x}$

(c) $\frac{y^2}{1 - y\log_e x}$ (d) $\frac{y^2}{y\log_e x - 1}$

Ans : (c) If $y = x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$ to infinity then $y = x^y$ which on taking log on both sides gives

$$\log y = y \log x$$

$\Rightarrow$ $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \log x \frac{dy}{dx}$

$\Rightarrow$ $\frac{dy}{dx}\left(\frac{1}{y} - \log x\right) = \frac{y}{x}$

$\Rightarrow$ $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x(1 - y\log x)}$

$\Rightarrow$ $x\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{1 - y\log x}$

66. If x =t, y= $\log_e$(cos t), $t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, then the value of $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$ is

यदि x =t, y= $\log_e$(cos t), $t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, तो $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$ का मान है

(a) $\log_e\left(\sqrt{2}+1\right)$ (b) $\log_e\left(\sqrt{2}-1\right)$

(c) $\sqrt{2}\log_e\left(\sqrt{2}+1\right)$ (d) $\sqrt{2}\log_e\left(\sqrt{2}-1\right)$

Ans : (a) If $x = t,\ y = \log_e(\cos t);\ t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

then $\frac{dx}{dt} = 1, \frac{dy}{dt} = \frac{1}{\cos t}(-\sin t), \frac{dy}{dt} = -\tan t$

$\Rightarrow \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 1, \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = (-\tan t)^2 = \tan^2 t$

then, $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 1 + \tan^2 t = \sec^2 t$

$\Rightarrow \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sec t$

$\Rightarrow \int_0^{\pi/4} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \int_0^{\pi/4} \sec t\, dt$

$= \log\left[\sec\frac{\pi}{4} + \tan\frac{\pi}{4}\right] - \log[\sec 0 + \tan 0]$

$= \log\left[\sqrt{2}+1\right] - \log[1+0]$

$= \log\left[\sqrt{2}+1\right]$

67. The value of $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{6n}\right]$ is

$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{6n}\right]$ का मान है

(a) 0 (b) $\log_e 2$

(c) $\log_e 3$ (d) $\log_e 6$

Ans : (d) $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+...+\frac{1}{6n}\right]$

$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{n+5n}\right]$

$= \lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{5n}\frac{1}{n+r}$

$= \lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{5n}\frac{1}{n}\frac{1}{1+r/n}$

$= \int_0^5 \frac{dx}{1+x} = [\log(1+x)]_0^5 = \log 6$

68. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\sin\frac{a}{n}\right)^n$ is equal to

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\sin\frac{a}{n}\right)^n$ बराबर है

(a) e (b) e^a

(c) e^{2a} (d) 0

Ans : (b) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\sin\frac{a}{n}\right)^n$

$= e^{\lim_{n\to\infty} n\sin\frac{a}{n}}$

$= e^{\lim_{n\to\infty}\left(\sin\frac{a/n}{a/n}\right)a}$

$= e^{1\times a} = e^a$

69. The value of $\int_0^{1000} e^{x-[x]}dx$ is

$\int_0^{1000} e^{x-[x]}dx$ का मान है

(a) $e^{1000}-1$ (b) $\frac{e^{1000}-1}{e-1}$

(c) 1000(e–1) (d) $\frac{e-1}{1000}$

Ans : (c) $\because \left[x-[x]=\{x\}\right]$ we have

$\int_0^{1000} e^{x-[x]}dx = 1000\int_0^1 e^{\{x\}} = 1000\left[e^x\right]_0^1$

$= 1000(e-1)$

70. The value of $\int x^2e^x dx$ is/ $\int x^2e^x dx$ का मान है

(a) $2e^x+c$

(b) $(x^2+2)e^x+c$

(c) $(x^2+2x+2)e^x+c$

(d) $(x^2-2x+2)e^x+c$

Ans : (d) $\int x^2e^x dx$

$= x^2e^x - 2\int xe^x dx$

$= x^2e^x - 2\left[xe^x - \int e^x dx\right]$

$= x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + c$

$= e^x(x^2-2x+2)+c$

71. The value of $\int_0^\infty \frac{xdx}{(1+x)(1+x^2)}$ is

$\int_0^\infty \frac{xdx}{(1+x)(1+x^2)}$ का मान है

(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{\pi}{4}$

(c) $\frac{\pi}{3}$ (d) $\frac{\pi}{8}$

Ans : (b) $I = \int_0^\infty \frac{xdx}{(1+x)(1+x^2)}$

Let $x = \tan\theta$

$dx = \sec^2\theta\, d\theta$

then, $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\tan\theta\sec^2\theta d\theta}{(1+\tan\theta)(1+\tan^2\theta)}$

$= \int_0^{\pi/2}\left(\frac{1+\tan\theta}{1+\tan\theta} - \frac{1}{1+\tan\theta}\right)d\theta$

$= \int_0^{\pi/2} d\theta - \int_0^{\pi/2}\frac{1}{1+\tan\theta}d\theta$

$= [\theta]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}\frac{\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}d\theta$

$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$

72. **If $u=\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}$ and $x^3+y^3+3axy=5a^2$, then the value $\frac{du}{dx}$ of at (a, a) is**

यदि $u=\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}$ तथा $x^3+y^3+3axy=5a^2$ है, तब (a, a) पर $\frac{du}{dx}$ का मान है

(a) a
(b) a^2
(c) $3a^2$
(d) None of the above /उपर्युक्त में से कोई नहीं

Ans : (d) Given $u=\sqrt{x^2+y^2}$ then

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy$$

Now

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \;\&\; \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

and differentiating $x^3+y^3+3axy=5a^2$ w.r.t x gives

$$3x^2+3y^2\frac{dy}{dx}+3a\left(x\frac{dy}{dx}+y\right)=0$$

$$\Rightarrow x^2+y^2\frac{dy}{dx}+ax\frac{dy}{dx}+ay=0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{-(x^2+ay)}{y^2+ax}$$

$$\therefore \frac{du}{dx}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(\frac{-(x^2+ay)}{y^2+ax}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{du}{dx}\right)_{x=y=a}=\frac{a}{a\sqrt{2}}+\frac{a}{a\sqrt{2}}\left(\frac{-2a^2}{2a^2}\right)=\frac{a}{a\sqrt{2}}-\frac{a}{a\sqrt{2}}=0$$

73. **A solution of the differential equation $\sqrt{1-x^2}dy+\sqrt{1-y^2}dx=0\ (|x|<1,|y|<1)$ is**

अवकल समीकरण $\sqrt{1-x^2}dy+\sqrt{1-y^2}dx=0\ (|x|<1,|y|<1)$ का एक हल है

(a) $x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=c$
(b) $x\sin^{-1}y+y\sin^{-1}x=c$
(c) $\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}}=c$
(d) $x\sqrt{1-x^2}+y\sqrt{1-y^2}=c$

Ans : (a)

$$\sqrt{1-x^2}dy+\sqrt{1-y^2}dx=0 \qquad (|x|<1,|y|<1)$$

$$\Rightarrow \sqrt{1-x^2}dy=-\sqrt{1-y^2}dx$$

$$\Rightarrow \int\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=-\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\Rightarrow \sin^{-1}y=-\sin^{-1}x+\sin^{-1}c$$

$$\Rightarrow \sin^{-1}y+\sin^{-1}x=\sin^{-1}c$$

$$\Rightarrow \sin^{-1}\left(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\right)=\sin^{-1}c$$

$$\Rightarrow x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=c$$

74. **If $u=\log\frac{x^3+y^3}{x+y}$, then the value of $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}$ is**

यदि $u=\log\frac{x^3+y^3}{x+y}$, तब $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}$ का मान है

(a) u (b) 2
(c) 0 (d) u+1

Ans : (b) If $u=\log\frac{x^3+y^3}{x+y}$ then let

$$z=e^u=\frac{x^3+y^3}{x+y}$$

thus z is a homogeneous function of x, y of order 2.

$$\therefore \quad x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=2z=2e^u$$

by Euler's Theorem on homogeneous functions.

But $\frac{\partial z}{\partial x}=e^u\frac{\partial u}{\partial x}$ and $\frac{\partial z}{\partial y}=e^u\frac{\partial u}{\partial y}$

then $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2e^u}{e^u}=2$

75. **If x+2y=8, then the maximum value of xy is**

यदि x+2y=8, तब xy का अधिकतम मान है

(a) 20 (b) 16
(c) 24 (d) 8

Ans : (d) If x + 2y = 8 then

$$xy=\frac{x}{2}(8-x)=4x-\frac{x^2}{2}$$

Let $f(x)=4x-\frac{x^2}{2}$

which on differentiating gives

$$f'(x)=4-x$$

and for extremum $f'(x)=0$ we get

$$x=4$$

which is the point of maximum value because

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2}=-1<0$$

Therefore maximum value of xy is 16 – 8 = 8.

76. **The equation of the tangent at $\theta=\frac{\pi}{2}$ to the curve $x=a(\theta+\sin\theta), y=a(1+\cos\theta)$ is**

वक्र $x=a(\theta+\sin\theta), y=a(1+\cos\theta)$ के $\theta=\frac{\pi}{2}$ पर स्पर्श-रेखा का समीकरण है